DS 4 de mathématiques – Corrigé

1 Exercice – Équation de d'Alembert

1. En prenant $x = y = 0$ dans la propriété vérifiée par f, on a $f(0) + f(0) = 2f(0)f(0)$. Donc, $2f(0) = 2f(0)^2$. Donc, $f(0) = 0$ ou 1.
   De plus, si $f(0) = 0$, en prenant x quelconque et $y = 0$ dans la propriété, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x) = 2f(x)f(0) = 0$$
   et donc f est identiquement nulle.

2. En prenant $x = 0$ et y quelconque, on a :
   $$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y),$$
   et donc, comme $f(0) = 1$, $f(y) = f(-y)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc, f est paire.

3. Comme f est continue en 0 et que $f(0) = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\delta, \delta], |f(x) - 1| \leq 1/2$. Pour un tel x, on a en particulier $f(x) \geq 1/2 > 0$.
   Or, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\delta}{2^q} \in [-\delta, \delta]$. Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{\delta}{2^q}\right) > 0$.

4. On montre cette égalité par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$, le cas $q = 0$ étant vrai par définition de θ.
   Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\dfrac{\delta}{2^q}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right)$. On utilise la propriété vérifiée par f avec $x = y = \dfrac{\delta}{2^{q+1}}$. On obtient :
   $$\cos\left(\frac{\theta}{2^q}\right) + 1 = 2f\left(\frac{\delta}{2^{q+1}}\right)^2.$$
   Donc, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) = 2f\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right)^2 - 1$. Par formule de duplication, on a aussi $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) = 2f\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{q+1}}\right)^2 - 1$. Donc, $f\left(\dfrac{\delta}{2^{q+1}}\right) = \pm\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{q+1}}\right)$. Mais les deux membres sont positifs : le premier d'après la question précédente ; le deuxième parce que $\theta \in [0, \pi/2]$. Donc, $f\left(\dfrac{\delta}{2^{q+1}}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{q+1}}\right)$, ce qui conclut la récurrence.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la relation vérifiée par f avec $x = \dfrac{(n+1)\delta}{2^q}$ et $y = \dfrac{\delta}{2^q}$. On a :
$$f\left(\frac{(n+2)\delta}{2^q}\right) + f\left(\frac{n\delta}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{(n+1)\delta}{2^q}\right) f\left(\frac{\delta}{2^q}\right).$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f\left(\frac{(n+2)\delta}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{(n+1)\delta}{2^q}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^q}\right) - f\left(\frac{n\delta}{2^q}\right).$$
On reconnait bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

6. Le polynôme caractéristique de la récurrence linéaire est $X^2 - 2X\cos\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) + 1$. Le discriminant est $\Delta = 4\left(\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) - 1\right) = -4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) = \left(2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right)\right)^2$. Les deux racines sont donc $2e^{\pm i\frac{\theta}{2^q}}$. Il existe donc deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f\left(\frac{n\delta}{2^q}\right) = \lambda\cos\left(\frac{n\theta}{2^q}\right) + \mu\sin\left(\frac{n\theta}{2^q}\right).$$
Pour $n = 0$, on doit avoir $1 = f(0) = \lambda$. Donc, $\lambda = 1$. Puis, en égalisant les valeurs pour $n = 1$, on obtient $\mu\sin\left(\dfrac{\theta}{2^q}\right) = 0$, et donc $\mu = 0$, car $\dfrac{\theta}{2^q} \in]0, \pi/2[$.

7. L'ensemble $A = \left\{\dfrac{n}{2^q}, (n,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\lfloor 2^q x \rfloor}{2^q} \in A$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et $\dfrac{\lfloor 2^q x \rfloor}{2^q} \to x$, quand $q \to +\infty$, par encadrement.
D'après la question précédente, l'égalité $f(x) = \cos\left(\dfrac{x\theta}{\delta}\right)$ a lieu pour tous les $x \in A$.
Si maintenant $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite x. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = \cos\left(\dfrac{x_n\theta}{\delta}\right)$. Donc, par continuité, $f(x) = \cos\left(\dfrac{x\theta}{\delta}\right)$.

Avec δ comme dans la question 3, on suppose maintenant que $f(\delta) \geq 1$; on peut alors trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{ch}\theta = f(\delta)$. On montrerait de façon analogue que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{x\theta}{\delta}\right)$.

8. D'après ce qui précède, si f est dans $\mathcal{E}$, alors
   - Ou bien f est la fonction nulle ;
   - Ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(\alpha x)$;
   - Ou bien il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$.

Réciproquement :

- La fonction nulle est bien dans $\mathcal{E}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a – par formule d'addition –

$$\cos(\alpha x + \alpha y) + \cos(\alpha x - \alpha y) = 2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y).$$

  Et $x \mapsto \cos(\alpha x)$ est continue ; donc elle est dans $\mathcal{E}$.
- Soit $\beta \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\operatorname{ch}(\beta x + \beta y) + \operatorname{ch}(\beta x - \beta y) = \frac{e^{\beta x+\beta y} + e^{\beta x-\beta y} + e^{-\beta x+\beta y} + e^{-\beta x-\beta y}}{2}$$

$$2\operatorname{ch}(\beta x)\operatorname{ch}(\beta y) = 2\left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}\right)\left(\frac{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}{2}\right).$$

  On constate que les deux expressions sont égales en développant.
  Ceci montre que $x \mapsto \operatorname{ch}(\beta x)$ est dans $\mathcal{E}$ (elle est bien continue).
  Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est exactement formé par les fonctions données en début de question.

2 Exercice – Idéaux maximaux d'un anneau

1. On sait que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$. Donc, si I est un idéal de $\mathbb{Z}$, il est de cette forme.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$, soit $x \in n\mathbb{Z}$. Comme x est un multiple de n, alors ax aussi. Donc, $ax \in n\mathbb{Z}$. Ceci montre que $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
   Donc, les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les parties $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit I un idéal de A contenant un inversible x de A. Soit $y \in A$. Alors, $yx^{-1} \in A$ et donc $y = (yx^{-1})x \in I$, par la deuxième propriété satisfaite par les idéaux. Ceci montre que $I \subset A$; et donc nécessairement que $I = A$.

3. Soit I un idéal de A, avec A un corps. Remarquons déjà que $0 \in I$ car I est un sous-groupe additif de A. Il y a alors deux cas :

   - Ou bien $I = \{0\}$; on vérifie immédiatement qu'il s'agit bien d'un idéal de A (car $\forall a \in A, a \times 0 = 0$).
   - Ou bien il existe a non nul dans I. Alors, comme A est un corps, a est inversible. D'après la question précédente, $I = A$ (qui est bien un idéal de A).

   Bilan : les idéaux de A, quand A est un corps, sont $I = \{0\}$ et $I = A$.

4. On remarque que, si $n, m \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ ssi m divise n. Au vu de la classification des idéaux de $\mathbb{Z}$, on en déduit que $n\mathbb{Z}$ est un idéal maximal ssi $m \mid n \implies m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ou $m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire ssi $m = 1$ ou $m = n$. Ceci revient à demander que n soit un nombre premier.
   Donc, les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les $p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.

5. (a)
   - $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$.
   - Soient $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On écrit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, où $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$ ne sont pas divisibles par p. Alors
   $$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \text{ et } xy = \frac{ac}{bd}.$$
   Comme p est un nombre premier, p ne divise pas bd. Donc, $x - y, xy \in \mathbb{Z}_{(p)}$.
   Donc, $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

   (b) Soit $x = \frac{a}{b}$ un inversible de $\mathbb{Z}_{(p)}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ non divisible par p. On peut donc trouver $y = \frac{c}{d}$ avec c, d vérifiant les mêmes conditions et $xy = 1$. On a donc $ac = bd$. Comme p ne divise pas bd, il ne divise pas non plus ac ; en particulier, il ne divise pas a.
   Réciproquement, si x s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ non divisibles par p, alors $\frac{b}{a}$ est son inverse dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ (on peut aussi écrire cet inverse $\frac{-b}{-a}$ pour forcer le dénominateur à être strictement positif).
   Ainsi, les inversibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$ sont les $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ tels que a, b ne sont pas divisibles par p.

   (c) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}_{(p)}$, distinct de $\mathbb{Z}_{(p)}$. D'après la question 2, $I \subset A \setminus A^\times$. (en notant $A = \mathbb{Z}_{(p)}$)
   Or, $A \setminus A^\times$ est l'ensemble des $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ est divisible par p et où $b \in \mathbb{N}^*$ n'est pas divisible par p.
   Montrons que $A \setminus A^\times$ est un idéal de $\mathbb{Z}_{(p)}$:
   - Il contient 0.
   - Si $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ sont dans $A \setminus A^\times$ (avec p divisant a et b), alors $x - y = \frac{ad - bc}{bd}$. Comme p divise $ad - bc$, $x - y \in A \setminus A^\times$.
   - Avec les mêmes notations pour x, si $z = \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_{(p)}$, alors $xz = \frac{ac}{bd}$ et p divise ac, donc $xz \in A \setminus A^\times$.

   Ainsi, l'idéal I est inclus dans l'idéal $A \setminus A^\times$. Cet idéal $A \setminus A^\times$ est donc l'unique idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

6. (a) Soit $f \in A^\times$. Notons g son inverse. Alors, fg est la fonction constante égale à 1. En particulier, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \neq 0$. Donc, f ne s'annule pas.
Réciproquement, si f ne s'annule pas, $\dfrac{1}{f}$ est continue et est l'inverse de f dans A.
Les inversibles de A sont donc les fonctions qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$.

(b)
- La fonction nulle est dans I_x.
- Si $f, g \in I_x$, alors $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ et donc $f - g \in I_x$.
- Si $f \in I$ et $h \in A$, alors $(fh)(x) = f(x)h(x) = 0$ et donc $fh \in I$.

Ceci montre que I est un idéal de A.
Considérons un idéal J contenant strictement I_x. On peut donc trouver $f \in J$ tel que $f(x) \neq 0$. On note g la fonction constante égale à $f(x)$. Alors, $(g-f)(x) = 0$ donc $g - f \in I_x \subset J$. Donc, $g \in J$. Comme g est un inversible de A, $J = A$.
Ceci montre que I_x est maximal.

(c) Comme I est maximal et qu'il est distinct de I_x, il n'est pas inclus dans I_x. On peut donc trouver $f_x \in I$ tel que $f_x(x) \neq 0$. Par continuité de f_x, on peut trouver $\delta_x > 0$ tel que

$$\forall y \in [0,1], |y - x| \leq \delta_x \implies f_x(y) \neq 0.$$

(d) On raisonne par l'absurde. Si l'énoncé est faux, on peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $y_n \in [0,1]$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on peut trouver un $z \in [0,1]$ vérifiant $|z - y_n| \leq 1/n$ mais $|z - x| > \delta_x$.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence $\ell \in [0,1]$. On prend $x = \ell$ ci-dessus ; il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in [0,1]$ tel que

$$|z_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ mais } |z_n - \ell| > \delta_\ell.$$

Par inégalité triangulaire inversée, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|y_n - \ell| > \delta_\ell - \dfrac{1}{n}$.
Et donc, pour n suffisamment grand, $|y_n - \ell| > \dfrac{\delta_\ell}{2}$; ceci contredit le fait que ℓ est une valeur d'adhérence de (y_n) et conclut.

(e) On considère $\delta > 0$ comme dans la question précédente. On considère un entier N tel que $\dfrac{1}{N} \leq \delta$. Pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, on note $J_j = \left[\dfrac{j}{N}, \dfrac{j+1}{N}\right]$. Si z est dans J_j, on a $|z - \dfrac{j}{N}| \leq \delta$, donc il existe $x_j \in [0,1]$ tel que $J_j \subset I_{x_j}$. Comme $[0,1] = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{N-1} J_j$, $[0,1] = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{N-1} I_{x_j}$.

(f) Soit $x \in [0,1]$. D'après la question précédente, $x \in I_k$ pour un certain $k \in [\![1, n]\!]$. On a $f(x) \geq f_{x_k}^2(x) > 0$ car $x \in I_k$. Donc, f ne s'annule pas en x. Ceci montre

que $f \in A^{\times}$.
De plus, $f \in I$. En effet, tous les f_{x_k} sont dans I ; donc les $f_{x_k}^2$ aussi (en utilisant la deuxième propriété des idéaux), donc f aussi (par stabilité de I par somme). Ainsi, I contient un inversible de A. Donc, $I = A$: c'est absurde. Donc, il existe $x \in [0,1]$ tel que $I = I_x$.

3 Problème – Nombre de rotation de Poincaré

3.1 Structure de groupe de H

1. Par récurrence immédiate, on montre que $f(x+n) = f(x) + n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $f(n) = f(0) + n \to +\infty$, quand $n \to +\infty$. Par théorème de la limite monotone, on sait que f a une limite en $+\infty$; comme $\big(f(n)\big)$ tend vers $+\infty$, la limite de f en $+\infty$ est nécessairement $+\infty$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = f(0) - n$ et donc $f(-n) \to -\infty$ quand $n \to -\infty$. Par le même argument, la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme f est strictement croissante, elle est injective. Donc, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.

2. Soient $f, g \in H$. Alors, $g \circ f$ est strictement croissante et continue par composition d'applications strictement croissantes et continues. De plus, si $x \in \mathbb{R}$,
$$(g \circ f)(x+1) = g(f(x+1)) = g(f(x)+1) = g(f(x)) + 1 = (g \circ f)(x) + 1.$$
Ainsi, $g \circ f$ est dans H.
De plus, si $f \in H$, f^{-1} est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (par le cours). Soit $y \in \mathbb{R}$. On l'écrit $y = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. On sait que $f(x+1) = f(x)+1$. En prenant l'image par f^{-1} : $x + 1 = f^{-1}(f(x)+1)$; c'est-à-dire $f^{-1}(y) + 1 = f^{-1}(y+1)$. Donc, f^{-1} est dans H.
Enfin, H est non vide : il contient l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Ceci montre que H est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}$; et donc un groupe pour $\circ$.

3.2 Définition de $\rho(f)$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\phi(x+1) = f(x+1) - (x+1) = f(x) + 1 - x - 1 = f(x) - x = \phi(x).$$
Donc, ϕ est périodique de période 1.

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y < x+1$. Comme f est strictement croissante, on a
$$f(x) \leq f(y) < f(x+1) = f(x) + 1$$

donc, $0 \leq f(y) - f(x) < 1$. De plus, $-1 < x - y \leq 0$. On additionne les inégalités ; par définition de ϕ, on a alors $-1 < \phi(y) - \phi(x) < 1$.
Considérons maintenant $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques. On peut trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq y + n < x + 1$ (prendre $n = -\lfloor y - x \rfloor$). On peut donc appliquer le raisonnement précédent et on a $-1 < \phi(y+n) - \phi(x) < 1$. Mais comme ϕ est 1-périodique, on a finalement $-1 < \phi(y) - \phi(x) < 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $f^n \in H$, la fonction $x \mapsto f^n(x) - x$ est 1-périodique (c'est le ϕ de la question précédente, avec f^n au lieu de f).
En particulier, $\{f^n(x) - x, x \in \mathbb{R}\} = \{f^n(x) - x, x \in [0,1]\}$. Comme $f^n - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$, l'ensemble $\{f^n(x) - x, x \in [0,1]\}$ admet un minimum et un maximum par le théorème des bornes atteintes. Donc, m_n et M_n sont bien définies.

6. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Comme $m_n \leq M_n$ et $m_p \leq M_p$, on a bien $m_n + m_p \leq M_n + M_p$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que $f^{n+p}(x) - x = \big(f^n(f^p(x)) - f^p(x)\big) + \big(f^p(x) - x\big)$. Or, $m_n \leq \big(f^n(f^p(x)) - f^p(x)\big) \leq M_n$ et $m_p \leq f^p(x) - x \leq M_p$. On ajoute les inégalités :
$$\forall x \in \mathbb{R}, m_n + m_p \leq f^{n+p}(x) - x \leq M_n + M_p.$$
Par définition de m_{n+p} et M_{n+p}, on a donc $m_n + m_p \leq m_{n+p}$ et $M_{n+p} \leq M_n + M_p$, ce qui conclut.

7. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, on a $2m_k = m_k + m_k \leq m_{2k}$. Puis $3m_k = 2m_k + m_k \leq m_{2k} + m_k \leq m_{3k}$, etc. Par une récurrence immédiate finie, on montre que $nm_k \leq m_{nk}$. Par un raisonnement analogue, on a aussi $M_{kn} \leq kM_n$. Comme $m_{kn} \leq M_{kn}$, on en déduit que $nm_k \leq kM_n$. Donc, en divisant par $kn > 0$: $\dfrac{m_k}{k} \leq \dfrac{M_n}{n}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\phi_n = f^n - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Par la question 4, on a $\phi_n(y) - \phi_n(x) < 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En prenant pour x et y les points où ϕ_n atteint son min et son max, on obtient $M_n - m_n < 1$.

9. D'après la question 7, pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{m_k}{k} \leq \dfrac{M_n}{n}$. À k fixé, on prend à droite l'inf sur n ; on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{m_k}{k} \leq \inf\Big\{\dfrac{M_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}$. On prend maintenant le sup sur k dans le membre de gauche :
$$\sup\Big\{\frac{m_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\Big\} \leq \inf\Big\{\frac{M_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}.$$
Par la question précédente, on a aussi $\dfrac{m_n}{n} \geq \dfrac{M_n}{n} - \dfrac{1}{n}$. Et donc
$$\sup\Big\{\frac{m_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\Big\} \geq \frac{m_n}{n} \geq \frac{M_n}{n} - \frac{1}{n} \geq \inf\Big\{\frac{M_p}{p}, p \in \mathbb{N}^*\Big\} - \frac{1}{n}.$$

L'inégalité $\sup\left\{\frac{m_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\} \geq \inf\left\{\frac{M_p}{p}, p \in \mathbb{N}^*\right\} - \frac{1}{n}$ étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\sup\left\{\frac{m_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\} \geq \inf\left\{\frac{M_p}{p}, p \in \mathbb{N}^*\right\}$. D'où l'égalité.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f^n - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ atteint les valeurs m_n et M_n. Or, $\frac{m_n}{n} \leq \rho(f) \leq \frac{M_n}{n}$; par le théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint donc aussi la valeur $n\rho(f)$; il existe donc $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f^n(x_n) = x_n + n\rho(f)$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notant $\phi_n = f^n - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on sait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}, -1 < \phi_n(x) - \phi_n(y) < 1$. En prenant pour y le x_n de la question précédente, on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f^n(x) - x - n\rho(f) < 1.$$
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{-1+x}{n} + \rho(f) < \frac{f^n(x)}{n} < \frac{1+x}{n} + \rho(f).$$
Par théorème d'encadrement, $\frac{f^n(x)}{n} \to \rho(f)$.

3.3 Premières propriétés de $\rho(f)$

12. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Par la question 11, on a
$$-1 < f^n(x) - x - n\rho(f) < 1.$$
En prenant la même inégalité pour g, au point $f^n(x)$, on a :
$$-1 < g^n(f^n(x)) - f^n(x) - n\rho(g) < 1.$$
En sommant les inégalités :
$$-2 < g^n(f^n(x)) - n(\rho(f) + \rho(g)) < 2,$$
ce qui montre que $\frac{g^n(f^n(x))}{n} \to \rho(f) + \rho(g)$.
Mais comme g et f commutent, on a $g^n(f^n(x)) = (g \circ f)^n(x)$. Donc, par la question 11, on a aussi $\frac{(g \circ f)^n(x)}{n} \to \rho(g \circ f)$. Par unicité de la limite, on a l'égalité : $\rho(g \circ f) = \rho(f) + \rho(g)$.

13. Le sous-groupe $\langle f \rangle \subset H$ formé des itérés de f pour $\circ$ est abélien. La question précédente montre que $\rho : \langle f \rangle \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes (pour la loi $\circ$ au départ et la loi $\circ$ à l'arrivée).
Par propriétés générales d'un morphisme (l'image du n-ème itéré est le n-ème itéré de l'image), on en déduit que $\rho(f^n) = n\rho(f)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

14. Supposons que f a un point fixe x_0. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_0) = x_0$ et donc, $\dfrac{f_n(x_0)}{n} = \dfrac{x_0}{n} \to 0$. Donc, $\rho(f) = 0$.
Réciproquement, si $\rho(f) = 0$, on peut trouver par la question 10 un réel x_1 tel que $f(x_1) = x_1 + 1 \times \rho(f) = x_1$. Donc, x_1 est un point fixe de f.

15. Tout élément de $\mathbb{U}$ peut s'écrire $e^{2i\pi\theta}$ pour un certain réel θ. De plus, si $e^{2i\pi\theta} = e^{2i\pi\theta'}$, alors $\theta - \theta' \in \mathbb{Z}$. On doit donc montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{Z}$, alors $e^{2i\pi f(\theta)} = e^{2i\pi f(\theta+k)}$. Or, on a déjà vu que $f(\theta) + k = f(\theta) + k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi,
$$e^{2i\pi f(\theta+k)} = e^{2i\pi f(\theta)+2ik\pi} = e^{2i\pi f(\theta)}.$$
Ceci montre que $\overline{f}$ est bien définie.
Soit $w \in \mathbb{R}$. On peut écrire $w = e^{2i\pi\alpha}$. Comme f est surjective, on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\theta) = \alpha$. Alors, $w = \overline{f}(e^{2i\pi\theta})$. Donc, $\overline{f}$ est surjective.
Soient $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $\overline{f}(z) = \overline{f}(z')$. On peut écrire $z = e^{2i\pi\theta}$ et $z' = e^{2i\pi\theta'}$, avec $\theta, \theta' \in [0, 1[$. Comme $e^{2i\pi f(\theta)} = e^{2i\pi f(\theta')}$, $f(\theta') - f(\theta) \in \mathbb{Z}$. Comme $f(1) = f(0) + 1$ et f est strictement croissante, on a nécessairement $\theta = \theta'$, donc $z = z'$. Ainsi, $\overline{f}$ est injective.
Finalement, on a montré la bijectivité de $\overline{f}$.

16. On note t_α l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $t_\alpha(x) = x + \alpha$. Elle est continue et strictement croissante et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t_\alpha(x + 1) = x + 1 + \alpha = f_\alpha(x) + 1$. Donc, t_α est dans H.
Par récurrence immédiate, on a $t_\alpha^n(0) = n\alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\dfrac{t_\alpha^n(0)}{n} \to \alpha$, quand $n \to +\infty$. Ceci montre que $\rho(t_\alpha) = \alpha$.
Enfin, $\overline{t_\alpha}$ vérifie par définition $\overline{t_\alpha}(e^{2i\pi\theta}) = e^{2i\pi t_\alpha(\theta)} = e^{2i\pi(\theta+\alpha)} = e^{2i\pi\alpha}e^{2i\pi\theta}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ceci montre que $\overline{t_\alpha} = R_\alpha$.

17. On écrit $\rho(f) = \dfrac{q}{p}$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Par la question 10, avec $n = p$, on peut trouver $x_p \in \mathbb{R}$ tel que $f^p(x_p) = x_p + p\rho(f) = x_p + q$. Comme $q \in \mathbb{Z}$, on a $e^{2i\pi(x_p+q)} = e^{2i\pi x_p}$, donc $\overline{f}^p(e^{2i\pi x_p}) = e^{2i\pi x_p}$. Ainsi, $z = e^{2i\pi x_p}$ est un point fixe de $\overline{f}^p$.

18. Réciproquement, on suppose que $\overline{f}^p$ admet un point fixe $z = e^{2i\pi\theta}$. On a $\overline{f}^p(z) = e^{2i\pi f^p(\theta)}$, donc $f^p(\theta) - \theta \in \mathbb{Z}$. Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $f^p(\theta) = \theta + q$. Par récurrence immédiate, $f^{np}(\theta) = \theta + nq$, pour tout $q \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\dfrac{f^{np}(\theta)}{n} \to q$. Donc, $\rho(f^p) = q$.
Par la question 13, on en déduit que $\rho(f) = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$.

3.4 Théorème de Poincaré

19. Supposons qu'il existe un réel x tel que $\Lambda_f(x)$ est dense dans $\mathbb{R}$. On note $z = e^{2i\pi x}$. Soit $w \in \mathbb{U}$, qu'on écrit $w = e^{2i\pi\theta}$. Par hypothèse, on peut trouver $(u_n) \in \Lambda_f(x)^{\mathbb{N}}$

telle que $u_n \to \theta$. Alors, par continuité, $e^{2i\pi u_n} \to e^{2i\pi\theta} = w$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'écrit $f^{p_n}(x) + m_n$ où $p_n, m_n \in \mathbb{Z}$. Donc, $e^{2i\pi u_n} = e^{2i\pi f^{p_n}(x)} = \overline{f}^{p_n}(z)$. Ainsi, la suite de terme général $e^{2i\pi u_n}$ est à valeurs dans $\Lambda_{\overline{f}}$. Ceci montre que $\Lambda_{\overline{f}}$ est dense dans $\mathbb{U}$.
Réciproquement, on suppose que $\Lambda_{\overline{f}}(z)$ est dense dans $\mathbb{U}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On peut trouver une suite $(z_n) \in \Lambda_{\overline{f}}(z)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $e^{2i\pi\theta}$. Par le lemme ci-dessous, on peut trouver une suite d'arguments des z_n, convergeant vers un argument de $e^{2i\pi\theta}$, donc vers un réel de la forme $2\pi\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\Lambda_f(x)$ est l'ensemble des arguments des éléments de $\Lambda_{\overline{f}}(z)$ divisés par 2π, on en déduit qu'il existe une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\theta + k$. Alors la suite $(\theta_n - k)$ est à valeurs dans $\Lambda_f(x)$ et converge vers θ.

Lemme. Si $(z_n) \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ converge vers $z \in \mathbb{U}$, on peut trouver une suite d'arguments (θ_n) des z_n convergeant vers un argument de z.
Supposons dans un premier temps que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Alors, pour n assez grand, $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ et $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z_n)}{\mathrm{Re}(z_n)}\right) \to \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$; on a bien une suite d'arguments de z_n convergeant vers un argument de z.
On peut ensuite se ramener à ce cas. Si $z_n \to z$, alors $\dfrac{z_n}{z} \to 1$. On trouve donc une suite (θ_n) d'arguments de $\dfrac{z_n}{z}$ tendant vers un argument de 1 ; en notant θ un argument de z, on a alors que la suite $(\theta_n + \theta)$ converge vers un argument de z ; et $\theta_n + \theta$ est un argument de z_n.

20. Soient $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z}^2$, tels que $f^n(x)+m = f^{n'}(x)+m'$. Sans perte de généralité, on peut supposer $n' \geq n$ et on a :

$$f^{n-n'}(f^{n'}(x)) - f^{n'}(x) \in \mathbb{Z}.$$

En notant $x' = f^{n'}(x)$ et $z' = e^{2i\pi x'}$, on a donc $\overline{f}^{n-n'}(z') = z'$. Comme $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, $\overline{f}$ n'a pas d'orbite périodique d'après la question 18. Donc, $n = n'$, puis $m = m'$. Ainsi, h est bien définie.
Comme $\alpha = \rho(f)$ est irrationnel, l'application $\psi : \mathbb{Z}^2 \to \Lambda, (n, m) \mapsto n\alpha + m$ est une bijection. On en déduit que h est une bijection, dont la bijection réciproque est donnée par $n\alpha + m \mapsto f^n(x) + m$ (bien définie).
Montrons la stricte croissance. Soient $n, m, n', m' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f^n(x) + m < f^{n'}(x) + m'.$$

On compose par $f^{n'-n}$ et on utilise la stricte croissance de f et le fait que $f(y+k) = f(y) + k$ si $y \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$f^{n'}(x) + m < f^{2n'-n}(x) + m'.$$

En réutilisant la première inégalité, on en déduit que :

$$f^n(x) + 2m < f^{2n'-n}(x) + 2m'.$$

On recompose par $f^{n'-n}$ pour obtenir :

$$f^{n'}(x) + 2m < f^{3n'-2n}(x) + 2m'.$$

De nouveau, la première inégalité permet d'obtenir :

$$f^n(x) + 3m < f^{3n'-2n}(x) + 3m'.$$

Par une récurrence immédiate, on montre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^n(x) + km < f^{kn'-(k-1)n}(x) + km'.$$

Le membre de gauche est équivalent à km quand $k \to +\infty$; celui de droite est équivalent à $k(n'-n)\alpha + km'$ (*même si* $n' - n < 0$ *car on a aussi* $\frac{f^i(y)}{i} \to \rho(f)$ *quand* i *tend vers* $-\infty$ *; utiliser* f^{-1}). Donc, $m \leq (n'-n)\alpha + m'$. On a bien montré que $h(f^n(x) + m) \leq h(f^{n'}(x) + m')$. L'inégalité est en fait stricte puisqu'on sait déjà que h est injective. Donc, h est strictement croissante.

21. Considérons un prolongement continu de h sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On peut trouver une suite (u_n) à valeurs dans $\Lambda_f(x)$, convergeant vers y. Alors $h(u_n) \to h(y)$ par continuité ; ceci montre qu'un prolongement continu de h sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminé par $h_{|\Lambda_f(x)}$, d'où l'unicité.
Pour l'existence, il est plus agréable de définir l'extension ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R}, h(y) = \sup\{h(z); z \in \Lambda_f(x), z \leq y\}.$$

- Ceci est bien défini. En effet, la partie considérée ci-dessus est non vide par densité de $\Lambda_f(x)$ et elle est majorée par n'importe quel $h(w)$, où $w \in \Lambda_f(x)$ est strictement plus grand que y.
- C'est bien une extension de h. En effet, h est strictement croissante sur $\Lambda_f(x)$. Donc, si $y \in \Lambda_f(x)$, le sup est un max, obtenu en $z = y$.
- L'extension de h ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante. En effet, si $y_1 < y_2$, on peut trouver $w_1, w_2 \in \Lambda_f(x)$ tel que $y_1 < w_1 < w_2 < y_2$. Comme $h(w_1)$ majore tous les $h(z)$ avec $z \in \Lambda_f(x)$ et $z \leq y_1$, on a $h(y_1) \leq h(w_1)$. Et par définition de $h(y_2)$, on a $h(y_2) \geq h(w_2)$. D'où $h(y_1) < h(y_2)$.
- Cette extension de h est continue. Sinon, par le théorème de la limite monotone, on pourrait trouver un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ disjoint de l'image de h ; ce n'est pas possible puisque $h(\Lambda_f(x)) = \Lambda$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et un irrationnel).

- Les limites de h en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$. Ces limites existent par théorème de la limite monotone ; si l'une ou l'autre était finie, l'ensemble image ne serait pas dense dans $\mathbb{R}$.

Le prolongement ainsi défini de h à $\mathbb{R}$ est donc une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

22. Considérons $y = f^n(x) + m$ un élément de $\Lambda_f(x)$. On a $f(y) = f^{n+1}(x) + m$, donc $h \circ f(y) = (n+1)\alpha + m$.
D'autre part, $h(y) = n\alpha + m$ et donc $t_\alpha \circ h(y) = (n+1)\alpha + m$.
Ainsi, les restrictions à $\Lambda_f(x)$ de $h \circ f$ et $t_\alpha \circ h$ coïncident. Comme $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et que $\Lambda_f(x)$ est une partie dense de $\mathbb{R}$, on a $h \circ f = t_\alpha \circ h$, par un argument désormais bien connu.