DM 11 - Méthode de Newton et théorème de d'Alembert-Gauss

1 Méthode de Newton

On décrit la méthode de Newton, qui donne une approximation rapide d'un zéro d'une fonction. Dans tout le problème, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$.

1.1 Préliminaires

1. Soit x^* un point intérieur à I tel que $f'(x^*) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ et deux constantes $m_1 > 0$ et $M_2 \geq 0$ telles que $[x^* - h, x^* + h] \subset I$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x^*| \leq h \implies |f'(x)| \geq m_1 \text{ et } |f''(x)| \leq M_2.$$

2. **Identité de Taylor-Lagrange à l'ordre** 2**.** Soient $a \neq b$ dans I.

   (a) Montrer qu'il existe une unique application polynomiale P de degré au plus 2 telle que $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ et $P(b) = f(b)$.

   (b) Montrer qu'il existe c compris entre a et b tel que $f''(c) = P''(c)$.

   (c) En déduire l'identité suivante :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

3. Soit $C > 0$. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq C u_n^2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq C^{-1}(Cu_0)^{2^n}.$$

1.2 Méthode de Newton

Soit $x^* \in I$ tel que $f(x^*) = 0$. On suppose que $f'(x^*) \neq 0$ et – pour simplifier – que x^* n'est pas une borne de I. Étant donné $x_0 \in I$, la méthode de Newton consiste à étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ si } x_n \text{ est dans } I \text{ et si } f'(x_n) \neq 0.$$

Si x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la suite (x_n) converge vers x^*, on dit que la méthode de Newton de donnée initiale x_0 converge vers x^*.

4. Interpréter géométriquement, en fonction la courbe représentative de f et de ses tangentes, la relation entre les points x_n et x_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$. Illustrer la méthode de Newton.

On note $I_0 = \left\{x \in I \mid f'(x) \neq 0\right\}$ et on définit N_f de I_0 dans $\mathbb{R}$ par :

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

5. Soit x dans I_0. En utilisant l'identité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, montrer qu'il existe ξ compris entre x et x^* tel que

$$N_f(x) - x^* = \frac{(x-x^*)^2}{2f'(x)} f''(\xi).$$

6. Soient h, m_1 et M_2 comme dans la question 1. Montrer que si x vérifie $|x - x^*| \leq h$, alors x est dans I_0 et

$$|N_f(x) - x^*| \leq |x - x^*|^2 \frac{M_2}{2m_1}.$$

7. On pose $C = \dfrac{M_2}{2m_1}$ et $h' = \min(h, C^{-1})$. Montrer que si $|x_0 - x^*| \leq h'$, alors la suite (x_n) donnée par la méthode de Newton est bien définie et vérifie l'estimation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x^*| \leq C^{-1}\Big(C|x_0 - x^*|\Big)^{2^n}.$$

8. En déduire que la méthode de Newton de donnée initiale x_0 converge vers x^*, si x_0 est suffisamment proche de x^*.

1.3 Application : la méthode de Héron

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9. Soit $x_0 > 0$. Expliciter la relation de récurrence définissant (x_n) dans la méthode de Newton pour la fonction f.

10. Estimer à partir de quel rang cette méthode donne une précision de $\sqrt{2}$ à 100 chiffres après la virgule.

2 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes, de degré $d \geq 1$.
On cherche à montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf \left\{ |P(z)|, z \in \mathbb{C} \right\}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geq 1$:

$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k \geq |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big).$$

3. En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que, si $|z| \geq R$, alors $|P(z)| \geq m + 1$.
4. En déduire l'existence d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente telle que $|P(z_n)|$ converge vers m.
5. On note α la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $|P(\alpha)| = m$.

On suppose par l'absurde que $m \neq 0$. On note $\theta \in [0, 2\pi[$ l'unique angle tel que $P(\alpha) = me^{i\theta}$.

6. Montrer la formule de Taylor suivante : $P = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X - \alpha)^i$.
7. Montrer l'existence de $k_0 = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \right\}$.
8. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z - \alpha)^{k_0}\big(1 + \varepsilon(z)\big) \quad \text{et} \quad \exists \delta > 0 : |z - \alpha| \leq \delta \implies |\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}.$$

9. Montrer qu'il existe un angle $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que, pour tout $r \geq 0$, si $z = \alpha + re^{i\phi}$, alors

$$P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z - \alpha)^{k_0} = \Big(m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{k_0!} r^{k_0}\Big)e^{i\theta}.$$

10. En déduire que si $z = \alpha + re^{i\phi}$ et si r est suffisamment petit,

$$|P(z)| \leq m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{2k_0!} r^{k_0}.$$

    Conclure.