Semaine 12 - Dérivabilité – Convexité

1 Dérivabilité

Reprise.
- Nombre dérivé
- Classe $\mathcal{D}^k$, classe $\mathcal{C}^k$
- Régularité de la dérivée d'une bijection réciproque
- Extremum local, point critique, liens entre les notions
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Variations de fonctions et signe de la dérivée
- Caractère Lipschitz d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment
- Théorème sur la limite de la dérivée ; théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^k$.

2 Convexité

Tout le chapitre mais les exercices à préparer pendant les vacances seront corrigés à la rentrée.
- Partie convexe du plan
- Épigraphe d'une fonction
- Fonction convexe
- Inégalité des pentes : il y a équivalence entre
  - f est convexe sur I
  - pour tout $a \in I$, $\tau_{a,f}$ définie sur $I - \{a\}$ par $\tau_{a,f}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante
  - Pour tous $a < b < c$ dans I :
  $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

  De plus, les trois inégalités précédentes sont en fait équivalentes.
- Inégalité de Jensen
- Une fonction dérivable est convexe ssi sa dérivée est croissante.
- Une fonction deux fois dérivable est convexe ssi sa dérivée seconde est positive.
- Inégalité arithmético-géométrique

3 Questions de cours

- Théorème et inégalité des accroissements finis (cas réel)
- Inégalités conséquences du TAF ou de la convexité
- Théorème de prolongement de régularité $\mathcal{C}^1$
- Une fonction dérivable est convexe ssi sa dérivée est croissante
- Inégalité arithmético-géométrique