DS 4 de mathématiques – Corrigé

1 Exercice – Équation de d'Alembert

1. Bien déclarer les variables, même dans des raisonnements simples.
2. RAS
3. Il devrait être automatique de penser à un argument de continuité. Trop de rédactions confuses utilisant le TVI alors qu'il s'agit de la définition de la continuité (propriété de localisation asymptotique)
4. Trop de passages non justifiés pour passer de l'égalité *au signe près* à une vraie égalité. Soigner les rédactions des récurrences, notamment en début de sujet.
5. RAS
6. Plusieurs démarches possibles. Utiliser la résolution des récurrences linéaires d'ordre 2, procéder par une récurrence double ou montrer que la suite des $\cos\left(\dfrac{n\theta}{\delta 2^q}\right)$ vérifie la même relation de récurrence ET a les mêmes conditions initiales (ce qui est finalement le même argument que la récurrence double).
7. La densité de l'ensemble des $\dfrac{n}{2^q}$ doit être justifiée (l'argument du corrigé est le plus rapide). Attention à ne pas oublier d'utiliser la parité de f : tout le travail s'est fait dans $\mathbb{R}_+$ pour le moment.
8. Nombreux problèmes logiques :
   - L'exercice consiste en une Analyse-Synthèse et la dernière question consiste essentiellement à faire la synthèse ; i.e. à vérifier que les fonctions trouvées jusque là sont bien des solutions de l'équation.
   - Les paramètres θ et δ ont été introduits au cours de la démonstration et la valeur que peut prendre le ration $\dfrac{\theta}{\delta}$ n'est pas complètement évident. Il est important de bien comprendre pourquoi ces paramètres disparaissent dans le corrigé et qu'on travaille avec α et β quelconques dans $\mathbb{R}_+$ (la synthèse montre qu'il n'y a pas de conditions sur ces paramètres).

   Ne pas oublier de dire que la fonction nulle est une solution. Les formules d'addition de ch ne sont pas supposées connues et il est préférable de faire un calcul rapide avec la définition par exponentielles.

2 Exercice – Idéaux maximaux d'un anneau

1. Bien utiliser le cours : on *connait* les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
2. RAS
3. Attention ! Même dans un corps, 0 n'est pas inversible !
4. La propriété importante à utiliser est que l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ est équivalente au fait que m divise n (attention au sens !). Affirmer seulement que les idéaux maximaux sont les $p\mathbb{Z}$ rapportait 1 point sur 4. Attention aussi aux rédactions où tout est dit de façon peu structurée ; en général, le raisonnement n'est alors pas fait par équivalences et il manque un sens.
5. (a) Quand on introduit $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)}$, il faut explicitement dire qu'on prend $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ non divisible par p. Il y a problèmes de non-unicité de l'écriture d'une fraction (qu'on retrouve à la question suivante).
   (b) Il est souvent affirmé que si $x = \dfrac{a}{b}$ est inversible, alors son inverse est $\dfrac{b}{a}$ et donc p ne divise pas a. C'est vrai, mais à justifier (à cause du problème de non-unicité de l'écriture d'une fraction) ; cf. le corrigé.
   (c) Rédaction souvent confuse. Bien structurer ce qu'on fait. Par exemple, dans le corrigé :
      - D'abord, on montre que tout idéal distinct de $\mathbb{Z}_{(p)}$ est inclus dans un certain ensemble.
      - Ensuite, on montre que cet ensemble est lui-même un idéal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
      - Enfin, on conclut.
6. (a) Quelques confusions sur la structure de produit. Il s'agissait du produit usuel ; d'une part, c'est un exemple de cours ; d'autre part, la distributivité n'est pas satisfaite (et la commutativité non plus) si on prend pour loi $\times$ la composition.
   On attendait une démonstration ; la seule réponse ne rapportait qu'un point sur 4.
   (b) Commencer par vérifier que I_x est un idéal. Beaucoup de justifications douteuses pour la maximalité ; le but était bien de construire une fonction ne s'annulant pas du tout à partir d'une fonction s'annulant en x et d'une fonction ne s'annulant pas en x.
   (c) Faire simple. C'est une application de la définition de la continuité : si une fonction ne s'annule pas en un point, elle ne s'annule pas sur un voisinage du point (peut être affirmé directement). Si on manipule des inégalités, rester avec des valeurs absolues.
   (d) Question délicate. Il s'agit déjà de bien comprendre ce que dit l'assertion aux 4 quantificateurs. Ensuite, on s'en sort par un raisonnement par l'absurde avec argument de séquentialisation + Bolzano-Weierstrass. La démonstration est analogue à celle du thèorème de Heine (et à beaucoup de démonstration de compacité, cf. cours de l'an prochain).
   (e) Relativement immédiat si on a compris l'assertion précédente. On a en fait montré un cas particulier de la propriété de Borel-Lebesgue du segment $[0, 1]$.
   (f) RAS

3 Problème – Nombre de rotation de Poincaré

3.1 Structure de groupe de H

1. On rappelle qu'on a intérêt à bien distinguer l'argument pour la surjectivité de celui pour l'injectivité. Des choses comme f *est continue et strictement croissante donc injective par le TVI* dénotent une pensée confuse et sont sanctionnées.

2. Le plus propre est de montrer que H est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{R}$. Ou bien, il faut le voir comme un groupe *abstrait*, mais dans ce cas il faut rappeler que $\circ$ est associative.
   Ne pas oublier d'évoquer la stabilité des conditions de continuité et stricte croissance par composition et passage à la bijection réciproque.

3.2 Définition de $\rho(f)$

3. RAS

4. Des rédactions souvent trop longues. On n'a jamais besoin de suivre une indication de l'énoncé, mais c'est souvent une bonne idée.

5. Beaucoup d'approximations dans l'application du TBA qui nécessite une fonction continue sur un segment. Bien distinguer le comportement sur $[0, 1]$, du comportement sur $\mathbb{R}$ (qui utilise la 1-périodicité).

6. Les inégalités dans l'énoncé étaient dans le mauvais sens ; on rappellera cependant qu'il y a très régulièrement des erreurs dans les sujets de concours et qu'il faut donc garder une (petite) place au doute quand on trouve un résultat manifestement en contradiction avec l'énoncé.

7. Trop de raisonnements hâtifs avec des inégalités dans le mauvais sens.

8. RAS

9. Il s'agissait essentiellement d'exploiter les inégalités précédentes. L'utilisation du théorème des suites adjacentes – ou un raisonnement analogue – est hors propos : il n'y a pas de raison *a priori* pour que la suite de terme $\dfrac{M_n}{n}$ soit monotone.

10. La question ne posait aucune difficulté si on revenait à la définition de $\rho(f)$.

11. RAS

3.3 Premières propriétés de $\rho(f)$

12. L'argument reposait sur l'égalité $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$ si g et f commutent. Il fallait cependant faire attention avec les inégalités et bien utiliser la question 11.

13. On peut accepter un argument de *récurrence immédiate* pour les $n \in \mathbb{N}$. Mais il faut donner un argument pour le passage à $\mathbb{Z}$.

14. RAS

15. Pour la bonne définition de $\overline{f}$, il faut comprendre le problème : quand on écrit un nombre sous la forme $e^{i\theta}$, θ n'est pas uniquement déterminé.
    Ensuite, pour la bijectivité de $\overline{f}$, les élèves séparant les arguments pour l'injectivité et la surjectivité s'en sortent bien mieux que celles et ceux qui veulent tout démontrer en même temps.
16. Les questions suivantes ont été peu traitées.
17.
18.

3.4 Théorème de Poincaré

19.
20.
21.
22.