Intégration sur un segment

Jeremy Daniel

> After years and years of finding mathematics easy, I finally reached integral calculus and came up against a barrier. I realized that that was as far as I could go, and to this day I have never successfully gone beyond it in any but the most superficial way.
>
> Isaac Asimov, *I. Asimov : A Memoir*

1 Autres propriétés élémentaires de l'intégrale

On suppose connues les propriétés élémentaires de l'intégrale : linéarité, positivité, relation de Chasles, croissance, inégalité triangulaire.

Proposition 1.1 (Stricte positivité de l'intégrale)
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Si $f \geq 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors, $f = 0$.

Remarque 1.2
Par contraposée, l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle est strictement positive.

Théorème 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f, g continues sur $[a, b]$. On a $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$.
Il y a égalité ssi f et g sont colinéaires.

2 TFA et formules de Taylor

Théorème 2.1 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$.
La fonction F, définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathcal{C}^1$; c'est l'unique primitive de f s'annulant en a.

On suppose connues les conséquences de ce théorème sur le calcul intégral : intégration par parties et formule du changement de variables.

Théorème 2.2 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$, où le reste intégral *$R_n(x)$ vaut*
$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Remarques 2.3
- La formule de Taylor avec reste intégral est une formule *globale* : elle donne la valeur de f en tout point de l'intervalle, à partir des premières dérivées de f en a et de la dérivée $(n+1)$-ème.
- C'est aussi une formule *exacte* : elle donne une égalité et non une inégalité.
- Pour $n = 0$, on retrouve $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.

Théorème 2.4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$, où $M_{n+1} = \sup\limits_{[a,x]} |f^{(n+1)}|$.

Remarques 2.5
- C'est encore une formule globale, mais elle donne seulement une inégalité.
- Pour $n = 0$, on retrouve $|f(x) - f(a)| \leq |x-a| \sup\limits_{[a,x]} |f'|$, qui est l'inégalité des accroissements finis.
- De même qu'il existe une égalité des accroissements finis, il existe aussi – pour les fonctions à valeurs réelles – une égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

Exercice 2.6
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Théorème 2.7 (Formule de Taylor-Young)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$. Alors, quand $x \to a$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Remarques 2.8
- Contrairement aux deux formules précédentes, cette formule est *locale* : elle donne une information asymptotique sur f, au voisinage de a.
- On utilisera cette formule pour obtenir des développements limités à tout ordre des fonctions usuelles, notamment pour résoudre des formes indéterminées de limites.
- La formule reste valable si f est seulement supposée $n-1$ fois dérivable au voisinage de a, avec $f^{(n-1)}$ dérivable en a.

3 Sommes de Riemann

Définition 3.1 (Somme de Riemann à gauche)
Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Riemann (à gauche) d'ordre n associée à f la somme :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Remarque 3.2
On peut aussi définir la somme de Riemann d'ordre n à droite d'ordre n associée à f :

$$S'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 3.3
Si $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, les suites $\big(S_n(f)\big)_n$ et $\big(S'_n(f)\big)_n$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque 3.4
La démonstration est plus simple si f est M-lipschitzienne pour un $M > 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Exemple 3.5
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2}$

4 Convergence uniforme des fonctions

Définition 4.1 (Norme infinie)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. La norme infinie (ou norme uniforme) de f est le réel, noté $\|f\|_\infty$, défini par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Remarque 4.2
Ceci est bien défini par le théorème des bornes atteintes. De plus, il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$.

Définition 4.3 (Convergence en norme infinie)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction continues sur $[a,b]$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Remarque 4.4
C'est équivalent à la formule suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f_n se rapproche donc uniformément de la fonction f.

Proposition 4.5
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction continue f sur $[a,b]$. Alors, $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Remarque 4.6
Cette propriété sera souvent utilisée avec le théorème suivant d'approximation, qu'on démontrera plus tard.

Théorème 4.7 (Weierstrass - HP)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'application polynomiales sur $[a,b]$ telle que (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 4.8 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \to 0$.