

## Intégration

### 1 Généralités sur l'intégration

**EXERCICE 1.** ♣ – ●○○ *Condition de périodicité*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, soit  $T > 0$ .

Montrer que  $f$  est  $T$ -périodique ssi la fonction  $g : t \mapsto \int_t^{t+T} f(u) du$  est constante.

**EXERCICE 2.** ♣/◊ – ●○○ *Égalité de la moyenne*

1. Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c)$ .
2. Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , avec  $g \geq 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$ .

**EXERCICE 3.** ◊ – ●●○ *Limites de  $\frac{1}{x} \int_0^x f$  en  $0^+$  et  $+\infty$*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Déterminer la limite de  $\frac{1}{x} \int_0^x f$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .
2. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f = \ell$ .

**EXERCICE 4.** ●●○ *Annulation des premiers moments*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ .  
Montrer que  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois sur  $]a, b[$ .

**EXERCICE 5.** ♣/◊ – ●●○ *Lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Montrer que  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\omega t) dt = 0$  quand

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ;
2.  $f$  est une fonction en escalier ;
3.  $f$  est continue par morceaux.

**EXERCICE 6.** ♣ – ●●○ *Un calcul de  $\zeta(2)$*

1. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\forall n \geq 1$ ,  $\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ .
2. En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, en déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**EXERCICE 7.** ●●○ Annulation de coefficients de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $2\pi$ -périodique telle que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0.$$

Montrer que  $f$  admet au moins  $2n + 2$  zéros distincts sur  $[0, 2\pi[$ .

**EXERCICE 8.** ♣/◊ – ●●○ Limite de  $\|f\|_p$ 

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |f|^p \right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

## 2 Suites et fonctions définies par des intégrales

**EXERCICE 9.** ♣ – ●○○  $\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$ 

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est à termes positifs et est décroissante.
2. Montrer que  $(u_n)$  tend vers 0 en comparant  $\ln(1+x)$  et  $x$ .
3. Retrouver le résultat de la question précédente en découplant l'intégrale en deux intégrales sur les segments  $[0, 1-\delta]$  et  $[1-\delta, 1]$ , où  $\delta > 0$ .

**EXERCICE 10.** ●○○  $\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ 

Soit  $\phi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .

1. Montrer que  $\phi$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Calculer les limites à gauche et à droite de  $\phi$  en 0.
3. Montrer que  $\phi$  est prolongeable par continuité en 0. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty$ .

**EXERCICE 11.** ●○○  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ 

Soit  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ , définie pour  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

1. Montrer que  $F$  se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^+$ .
3. Montrer que  $F$  est convexe et tracer sa courbe représentative.
4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $F$ .

**EXERCICE 12.** ♣ – ●○○ *Intégrale de Poisson*

On définit pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  l'intégrale de Poisson

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

1. Décomposer en produits d'irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes  $X^{2n} - 1$ .

2. En déduire la valeur de  $I(x)$ .

**EXERCICE 13.** ●○○  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt$ 

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Déterminer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt$ .

**EXERCICE 14.** ●●○  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^{ah} \frac{f(t)}{t} dt$ 

Soient  $a > 0$  et  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Déterminer la valeur de  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^{ah} \frac{f(t)}{t} dt$ .

**EXERCICE 15.** ♣/◊ – ●●○ *Une suite d'intégrales imbriquées*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_n(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}) dx_1 \dots dx_n$ .

Montrer que  $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel à préciser.

### 3 Inégalités intégrales

**EXERCICE 16.** ♣/◊ – ●○○ *Quand la dérivée borne l'intégrale*

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_\infty.$$

**EXERCICE 17.** ●○○ *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*

Soit  $f$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $f$  pour qu'on ait l'égalité

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt.$$

2. Même question si  $f$  est à valeurs complexes.

**EXERCICE 18.** ●○○ *Inégalité de Young*

Soit  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $[0, a]$ .

- Montrer que pour tout réel  $x \in [0, a]$  :

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(u) du = xf(x).$$

- En déduire que pour tous réels  $x$  de  $[0, a]$  et  $y$  de  $[0, f(a)]$  :

$$xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(u) du.$$

- Cas d'égalité ?

**EXERCICE 19.** ♣ – ●○○ *Deux applications de Cauchy-Schwarz*

- Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que  $fg \geq 1$ . Montrer que  $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$ .
- Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = a, f(1) = b\}$ . Déterminer  $\inf_{f \in E} \int_0^1 (f')^2$ .  
Cette borne est-elle atteinte ? Interprétation physique ?

**EXERCICE 20.** ♣ – ●●○ *Inégalité de Poincaré*

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  telles que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$ .

**EXERCICE 21.** ♣/◊ – ●●○ *Lemme de Gronwall*

Soient  $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ . On suppose qu'il existe  $C \geq 0$  tel que  $\forall t \geq 0, u(t) \leq C + \int_0^t uv$ .  
Montrer que  $\forall t \geq 0, u(t) \leq C \exp\left(\int_0^t v\right)$ .

**EXERCICE 22.** ♣ – ●●○ *Deux inégalités intégrales avec  $f^2$  et  $f'^2$* 

- Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^1([a, b]), \forall x \in [a, b], |f(x)^2 - f(a)^2| \leq C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2$ .
- Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0, \forall f \in \mathcal{C}^1([a, b]), \|f^2\|_\infty \leq D \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2$ .

## 4 Formules de Taylor

**EXERCICE 23.** ○○○ *Encadrement fin de la fonction sinus*

Montrer que pour tout  $x \in [0, \pi/2] : x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .

**EXERCICE 24.** ●○○ Développements en série entière de  $\cos$  et  $\sin$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$  et  $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ .

**EXERCICE 25.** ♣/◊ – ●●○ Inégalité de Kolmogorov

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $|f|$  est bornée par  $M_0$  et  $|f''|$  est bornée par  $M_2$ .

Montrer que  $|f'|$  est bornée par  $\sqrt{2M_0 M_2}$ .

**EXERCICE 26.** ♣ – ●●○ Prolongement  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0) = 0$ . Soit  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ .

1. Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$  puis, en reconnaissant une formule de Taylor, l'exprimer sous la forme d'une intégrale.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x)$ .
4. En déduire que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 5 Sommes de Riemann

**EXERCICE 27.** ●○○ Équivalent de  $\sum_{k=1}^n k^\alpha$

Soit  $\alpha > 0$ . En utilisant une somme de Riemann, démontrer l'équivalent  $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ .

**EXERCICE 28.** ●●○ Sommes de Riemann

Calculer les limites quand  $n \rightarrow +\infty$  de

- |                                           |                                                                         |                                                |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$           | 3. $\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ | 4. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$           |
| 2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$ |                                                                         | 5. $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$ |

**EXERCICE 29.** ●●○ Sommes de Riemann doubles

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. Déterminer la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. Déterminer la limite de  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**EXERCICE 30.** ♣/◊ – ●●○ *Intégrales généralisées ?*

Déterminer les limites des suites de terme général  $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$  et  $B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ .

**EXERCICE 31.** ●●○ *Développements asymptotiques et sommes de Riemann*

1. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Déterminer  $\alpha$  tel que  $\int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .
2. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
3. En déduire un développement asymptotique à trois termes de  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2}$ .

## Indications

**Exercice 2.** Par le TAF ou en utilisant la propriété de croissance de l'intégrale.

**Exercice 3.** Pour la limite en 0, utiliser le théorème d'intégrale des DL. Pour la limite en  $+\infty$ , raisonner par analogie avec le théorème de Cesàro.

**Exercice 5.** Pour 2., se ramener par linéarité aux fonctions indicatrices d'intervalles. Pour 3., approcher une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

**Exercice 8.** Faire un dessin et se convaincre que seul ce qui se passe en un point où  $|f|$  atteint son maximum va compter.

**Exercice 15.** On pourra commencer par le cas où  $f$  est polynomiale.

**Exercice 16.** Exprimer  $f$  comme l'intégrale de sa dérivée. Un peu d'astuce permet d'utiliser les deux hypothèses  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 0$ .

**Exercice 21.** On pourra considérer la fonction  $t \mapsto u(t) \exp\left(-\int_0^t v\right)$

**Exercice 25.** On appliquera les inégalités de Taylor-Lagrange entre  $x-h$  et  $x$  d'une part et  $x$  et  $x+h$  d'autre part, pour un  $h$  bien choisi.

**Exercice 30.** Le théorème sur les sommes de Riemann s'applique pour des fonctions continues sur un segment. Pour contourner la difficulté, préférer une comparaison série-intégrale.