DM 11 - Méthode de Newton et théorème de d'Alembert-Gauss

1 Méthode de Newton

1.1 Préliminaires

1. Comme f est $\mathscr{C}^2$, $|f'|$ est continue et $|f'(x^*)| > 0$. Notons $m_1 = \dfrac{|f'(x^*)|}{2}$. Par localisation asymptotique, on peut trouver $h > 0$ tel que $\forall x \in [x^* - h, x^* + h], |f'(x^*)| \geq m_1$. Comme $|f''|$ est continue sur le segment $[x^* - h, x^* + h]$, elle est majorée, par le théorème des bornes atteintes. En notant M_2 ce majorant, on obtient la deuxième inégalité.

2. (a) Montrons d'abord l'unicité. Si P et Q sont deux tels polynômes dans $\mathbb{R}_2[X]$, $R = P - Q$ vérifie $R(a) = R(b) = R'(a) = 0$. Ceci montre que a est racine de R de multiplicité au moins 2 et que b est racine de R. Comme $\deg R \leq 2 < 2+1$, R est nul. Donc $P = Q$.

   Pour l'existence, on peut chercher le polynôme sous la forme
   $$P = f(a) + f'(a)(X-a) + C(X-a)^2,$$
   avec $C \in \mathbb{R}$. Par construction, on a $P(a) = f(a)$ et $P'(a) = f'(a)$. De plus,
   $$P(b) = f(b) \iff C = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}.$$
   Ainsi, avec cette valeur de C, P convient.

   (b) Notons $g : x \mapsto f(x) - P(x)$. Alors g est de classe $\mathscr{C}^2$. Comme $g(a) = g(b) = 0$, le théorème de Rolle implique l'existence d'un d compris entre a et b tel que $g'(d) = 0$. Comme $g'(a) = g'(d) = 0$, le théorème de Rolle implique l'existence d'un c compris entre a et d (donc entre a et b) tel que $g''(c) = 0$, c'est-à-dire $f''(c) = P''(c)$.

   (c) P'' est le polynôme constant égal à $2C$. Avec la valeur trouvée plus haut pour C, on a donc :
   $$f''(c) = \frac{2\big(f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\big)}{(b-a)^2}.$$
   C'est équivalent à l'identité demandée.

3. On peut procéder par une récurrence rapide. Donnons un point de vue légèrement différent, qui permet de deviner la majoration.

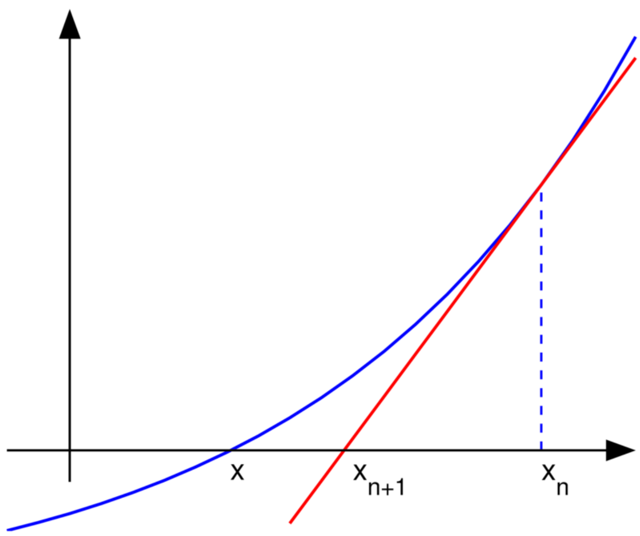
   Considérons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = Cv_n^2$. Une récurrence (immédiate !) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Calculons maintenant le terme général v_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et, en passant au logarithme, $\ln v_{n+1} = \ln C + 2\ln v_n$. Ainsi, la suite de terme général $\ln v_n$ vérifie une relation de récurrence arithmético-géométrique. La suite de terme général $w_n = \ln v_n + \ln C$ est géométrique de raison 2. On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ln v_n = -\ln C + 2^n(\ln v_0 + \ln C).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = C^{-1}(Cv_0)^{2^n}$. Comme $v_0 = u_0$, cela conclut.

Principe : plutôt que de considérer une relation de récurrence en inégalités, on travaille avec la suite vérifiant le cas d'égalité, dont on peut déterminer le terme général. Cependant, une récurrence directe est rapide.

1.2 Méthode de Newton

4. La tangente à la courbe représentative de f en x_n a pour équation $y = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)$. Elle intersecte donc l'axe des abscisses quand $f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) = 0$, donc quand $x = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, c'est-à-dire quand $x = x_{n+1}$.
   La méthode consiste donc à identifier la courbe représentative de f avec sa tangente à x_n et de chercher où s'annule cette tangente. On espère ainsi se rapprocher de plus en plus d'un véritable zéro de f, en itérant.



5. Par l'identité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, appliquée à la fonction f entre x et x^*, on sait qu'il existe ξ compris entre x et x^* tel que :
$$f(x^*) = f(x) + f'(x)(x^* - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x)^2.$$
   Le membre de gauche est nul par définition de x^*. On divise par $f'(x)$, supposé non nul et on utilise que $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - N_f(x)$. On obtient :
$$0 = x - N_f(x) + (x^* - x) + \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x^* - x)^2.$$
   C'est équivalent à l'égalité demandée, en remarquant bien sûr que $(x^* - x)^2 = (x - x^*)^2$.

6. Par construction, si $|x-x^*| \leq h$, alors $|f'(x)| \geq m_1$ et en particulier $f'(x) \neq 0$, donc $x \in I_0$. De plus, par la question précédente, on a l'existence d'un nombre ξ entre x et x^* tel que :

$$|N_f(x) - x^*| = \frac{(x-x^*)^2}{2|f'(x)|}|f''(\xi)|.$$

Comme ξ est compris entre x et x^*, on a en particulier $|\xi - x^*| \leq h$ et donc $|f''(\xi)| \leq M_2$. Et on a déjà dit que $|f'(x)| \geq m_1$. Ces deux inégalités montrent que

$$|N_f(x) - x^*| \leq |x-x^*|^2 \frac{M_2}{2m_1}.$$

7. Notons I l'intervalle $[x^* - h', x^* + h']$. Montrons que I est stable par N_f. Soit $x \in I$. On a donc $|x - x^*| \leq h'$. En particulier, $|x-x^*| \leq h$ et, par la question précédente :

$$|N_f(x) - x^*| \leq |x-x^*|^2 \times C \leq h'^2 \times C \leq h'.$$

En effet, on a $C \leq h'^{-1}$.

Comme l'intervalle I est stable par N_f, on en déduit que si $x_0 \in I$, la suite définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_{n+1} = N_f(x_n)$ est bien définie, et tous les termes x_n sont dans I.

De plus, par la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x^*| = |N_f(x_n) - x^*| \leq |x_n - x^*|^2 \times C.$$

Par la question 3, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x^*| \leq C^{-1}\big(C|x_0 - x^*|\big)^{2^n}.$$

8. Soit x_0 tel que $|x_0 - x^*| < h'$. Alors l'inégalité précédente a lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $C|x_0 - x^*| < C \times h' \leq 1$. Dès lors, la suite $\big(C|x_0 - x^*|\big)^{2^n}$ tend vers 0 et donc $|x_n - x^*|$ aussi.

Ainsi, pour une telle donnée initiale x_0, la méthode de Newton converge vers x^*.

1.3 Application : la méthode de Héron

9. Dans ce cas, la récurrence est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n},$$

qu'on peut réécrire comme $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2x_n} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$.

Interprétation géométrique : déterminer la racine carrée de a, c'est chercher un carré dont l'aire vaut a. On part d'un rectangle de côtés x_0 et a/x_0, puis on remplace l'un des côtés par la moyenne des deux et on itère le processus. Le rectangle se transforme progressivement en carré.

10. On cherche d'abord à estimer les différentes constantes en jeu. On constate que si $x \geq 1$, $|f'(x)| = f'(x) = 2x \geq 2$ et $f''(x) = 2$. Donc, dans la première question, on peut prendre $h = \sqrt{2} - 1$, $m_1 = 2$ et $M_2 = 2$. Alors $C = \dfrac{M_2}{2m_1} = \dfrac{1}{2}$ et $h' = \min(\sqrt{2} - 1, 2) = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, si x_0 est compris entre 1 et $\sqrt{2}$, la méthode de Newton va converger et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \sqrt{2}| \leq 2\left(\frac{|x_0 - \sqrt{2}|}{2}\right)^{2^n}.$$

Prenons par exemple $x_0 = 1$. On peut majorer grossièrement $|x_0 - \sqrt{2}|$ par $1/2$ et on a donc : $|x_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{2}{4^{2^n}} = \dfrac{2}{2^{2^{n+1}}} = 2^{1-2^{n+1}}$.

En particulier, si on veut $|x_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-100}$, il suffit d'avoir :

$$2^{1-2^{n+1}} \leq 10^{-100}.$$

C'est équivalent à $(1-2^{n+1})\ln 2 \leq -100 \ln 10$, donc à $2^{n+1} - 1 \geq 100 \dfrac{\ln 10}{\ln 2}$. Le membre de droite vaut environ 332 et $2^9 = 524$. Donc $n = 8$ convient.

On retiendra que la convergence est très rapide : le nombre de décimales est en gros multiplié par 2 *après chaque itération.*

2 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes, de degré $d \geq 1$.
On cherche à montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\left\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\right\}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geq 1$:
$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k \geq |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big).$$
3. En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que, si $|z| \geq R$, alors $|P(z)| \geq m + 1$.
4. En déduire l'existence d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente telle que $|P(z_n)|$ converge vers m.
5. On note α la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $|P(\alpha)| = m$.

On suppose par l'absurde que $m \neq 0$. On note $\theta \in [0, 2\pi[$ l'unique angle tel que $P(\alpha) = me^{i\theta}$.

6. Montrer la formule de Taylor suivante : $P = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X - \alpha)^i$.
7. Montrer l'existence de $k_0 = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0\right\}$.
8. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z - \alpha)^{k_0}\big(1 + \varepsilon(z)\big) \quad \text{et} \quad \exists \delta > 0 : |z - \alpha| \leq \delta \implies |\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}.$$
9. Montrer qu'il existe un angle $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que, pour tout $r \geq 0$, si $z = \alpha + re^{i\phi}$, alors
$$P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z - \alpha)^{k_0} = \big(m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{k_0!} r^{k_0}\big)e^{i\theta}.$$
10. En déduire que si $z = \alpha + re^{i\phi}$ et si r est suffisamment petit,
$$|P(z)| \leq m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{2k_0!} r^{k_0}.$$

    Conclure.

1. L'ensemble $\left\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, donc elle admet une borne inférieure.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$. Par inégalité triangulaire inversée, on a
$$|P(z)| = |a_d z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k| \geq |a_d z^d| - |\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k|.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k.$$

Et donc :

$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k.$$

Comme de plus $|z| \geq 1$, on a $|z|^k \leq |z|^{d-1}$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$. Donc,

$$|a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^{d-1} = |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big).$$

3. Posons $R = \max(1, \dfrac{m+1+\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|}{|a_d|})$. Si $|z| \geq 1$, on a donc $|z|^{d-1} \geq 1$ et $|a_d||z| - \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \geq m+1$. Donc, en utilisant la question précédente :

$$|P(z)| \geq |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big) \geq 1 \times (m+1) = m+1.$$

4. Notons $A = \Big\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\Big\}$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on peut trouver une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, de limite m. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $w_n \in \mathbb{C}$ telle que $|P(w_n)| = u_n$. Pour n suffisamment grand, on a $u_n < m+1$. Donc, d'après la question précédente, $|w_n| < R$ pour n assez grand.

   Par le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut extraire de (w_n) une sous-suite convergente, qu'on note (z_n). Comme la suite de terme général $|P(z_n)|$ est extraite de (u_n), elle converge aussi vers m.

5. *Il s'agit d'un résultat de continuité pour la fonction polynomiale P, vue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Stricto sensu, on n'a pas défini de notion de continuité pour ces fonctions.*

   Comme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(z_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k z_n^k$. Comme $z_n \to \alpha$, on a par opérations élémentaires sur les limites (*qu'on a données dans* $\mathbb{C}$),

$$\sum_{k=0}^{d} a_k z_n^k \to \sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k.$$

   Donc, $P(z_n) \to P(\alpha)$, quand n tend vers $+\infty$. Par passage au module, $|P(z_n)| \to |P(\alpha)|$. Donc, par unicité de la limite, $m = |P(\alpha)|$.

6. cf. cours sur les polynômes

7. Par la formule de Taylor en α, on a

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

   Si pour tout $k \geq 1$, on avait $P^{(k)}(\alpha) = 0$, on aurait alors $P = P(\alpha)$, ce qui est contraire l'hypothèse. La partie $\{k \in \mathbb{N}^* \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle admet donc un minimum.

8. En utilisant de nouveau la formule de Taylor et par définition de k_0, on a :

$$P = P(\alpha) + \sum_{k=k_0}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On évalue en z et on réécrit un peu l'expression :

$$P(z) = P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\Big(1 + \sum_{k=k_0+1}^{d} \frac{k_0!}{k!}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{P^{(k_0)}(\alpha)}(z-\alpha)^{k-k_0}\Big).$$

On note $\varepsilon(z)$ la somme dans la parenthèse. On a :

$$|\varepsilon(z)| \leq \sum_{k=k_0+1}^{d} \frac{k_0!}{k!}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{P^{(k_0)}(\alpha)}|z-\alpha|^{k-k_0}.$$

Comme toutes les puissances $k-k_0$ sont strictement positives, $|\varepsilon(z)|$ tend vers 0 quand z tend vers α. On a en particulier l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $|z-\alpha| \leq \delta \implies |\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}$.

9. On écrit $P^{(k_0)}(\alpha) = |P^{(k_0)}(\alpha)|e^{i\psi}$, où $\psi \in [0, 2\pi[$. Soit $\phi \in [0, 2\pi[$, soit $r \geq 0$; on écrit $z = \alpha + re^{i\phi}$. On a alors :

$$\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0} = \frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}e^{i\psi}r^{k_0}e^{ik_0\phi}.$$

En prenant ϕ tel que $\psi + k_0\phi \equiv \theta + \pi[2\pi]$, on a donc :

$$\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0} = -\frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}e^{i\theta}.$$

Et donc : $P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0} = \big(m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}\big)e^{i\theta}$.

10. Soit $z = \alpha + re^{i\phi}$. Si $r \leq \delta$, on a $|\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2}$. Par inégalité triangulaire et la question 7, on a :

$$|P(z)| \leq \Big|P(\alpha) + \frac{P^{k_0}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\Big| + \Big|\frac{P^{k_0}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\Big|\Big|\varepsilon(z)\Big|.$$

Le premier terme vaut $m - \frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}$. Le deuxième terme est inférieur à $\frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{2k_0!}r^{k_0}$ si r est suffisamment petit. Donc, pour r assez petit,

$$|P(z)| \leq m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{2k_0!}r^{k_0}.$$

Cette inégalité montre que, sur un demi-rayon partant de α, et suffisamment proche de α, $|P(z)|$ prend des valeurs strictement inférieures à m. C'est en contradiction avec la définition de m.

Donc, on a en fait $m = 0$ et α est une racine de P.