

## DS 5 de mathématiques

## 1 Théorème de Glaeser

1.1 Condition pour que  $\sqrt{f}$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ 

1. Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$  et que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable en  $f(x_0) > 0$ , la fonction  $\sqrt{f}$  est dérivable en  $x_0$  par composition. Les formules usuelles donnent :

$$\left(\sqrt{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

2. (a) Comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et que  $f(x_0) = 0$ ,  $f$  atteint en  $x_0$  un minimum local. Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on a  $f'(x_0) = 0$ .
- (b) Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en  $x_0$  donne :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2) = \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

En divisant par  $h^2$ , on obtient  $\frac{f(x_0 + h)}{h^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + o(1)$ , c'est-à-dire

$$\frac{f(x_0 + h)}{h^2} \rightarrow \frac{f''(x_0)}{2}, \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

- (c) Comme  $f$  est à valeurs positives, on peut passer à la racine carrée dans la limite précédente ( $f''(x_0) \geq 0$  puisque c'est la limite d'une fonction à valeurs positives). On a donc :

$$\frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{|h|} \rightarrow \frac{\sqrt{f''(x_0)}}{\sqrt{2}},$$

quand  $h \rightarrow 0$ . On peut alors distinguer selon que  $h > 0$  ou  $h < 0$ . On obtient que  $\frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} \rightarrow \pm \frac{\sqrt{f''(x_0)}}{\sqrt{2}}$ , selon que  $h \rightarrow 0^+$  ou  $0^-$ . Par définition,  $\sqrt{f}$  est

dérivable en  $x_0$  ssi la quantité  $\frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h}$  a une limite finie quand  $h \rightarrow 0$  ; c'est donc équivalent à ce que deux limites trouvées à gauche et à droite coïncident, c'est-à-dire à  $f''(x_0) = 0$ .

Dans ce cas,  $\left(\sqrt{f}\right)'(x_0)$  est égal à 0, qui est cette limite commune.

3. (a) Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral suivante :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} (x + h - t)f''(t)dt.$$

Les  $t$  entre  $x$  et  $x+h$  sont dans  $I(\alpha)$  et donc, pour ces  $t$ ,  $|f''(t)| \leq M(\alpha)$ . Par inégalité triangulaire, en faisant attention aux bornes de l'intégrale, on a de plus :

$$\int_x^{x+h} (x+h-t)f''(t)dt \leq \left| \int_x^{x+h} (x+h-t)f''(t)dt \right| \leq M(\alpha) \left| \int_x^{x+h} (x+h-t)dt \right|.$$

L'intégrale vaut  $\int_0^h (h-t)dt = \frac{h^2}{2}$ .

Ainsi,  $f(x+h) \leq f(x) + hf'(x) + M(\alpha)\frac{h^2}{2}$ . Comme  $f$  est à valeurs positives,  $f(x+h) \geq 0$ , et donc

$$f(x) + hf'(x) + M(\alpha)\frac{h^2}{2} \geq 0.$$

- (b) Ce trinôme  $p$  a comme coefficient dominant  $\frac{M(\alpha)}{2} > 0$ , donc il atteint son minimum en l'unique  $h$  tel que  $p'(h) = 0$ . Ce  $h$  est tel que  $f'(x) + hM(\alpha) = 0$  ; donc le minimum est atteint en  $h = -\frac{f'(x)}{M(\alpha)}$ . Comme  $x$  et  $x_0$  sont dans  $I(\alpha)$ ,  $|f''| \leq M_2$  entre  $x$  et  $x_0$ . Donc, par inégalité des accroissements finis,

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(x_0)| \leq M_2|x - x_0| \leq M(\alpha)\alpha.$$

D'où,  $|h| \leq \alpha$ .

- (c) D'après la question précédente, le trinôme précédent atteint son minimum en un  $h$  tel que  $|h| \leq \alpha$ . D'après la question (a), ce trinôme est positif en un tel  $h$ . Donc, ce trinôme est positif sur  $\mathbb{R}$  ; son discriminant est donc négatif, ce qui donne l'inégalité :  $(f')^2(x) \leq 2f(x)M(\alpha)$ .
- (d) On note  $A$  l'ensemble des points où  $\sqrt{f}$  est dérivable. D'après les questions 1. et 2.,  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \text{ ou } f(x) = f'(x) = f''(x) = 0\}$ . Par hypothèse,  $x_0 \in A$  et on doit montrer que  $\sqrt{f}$  - qui est définie sur  $A$  - est continue en  $x_0$ . D'après ce qui précède, si  $x \in A \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ , alors  $(f')^2(x) \leq 2f(x)M(\alpha)$ . Si  $x$  est tel que  $f(x) > 0$ , on a  $\left| \left( \sqrt{f} \right)'(x) \right| = \left| \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \right| \leq M(\alpha)$ .

De plus, l'inégalité  $\left| \left( \sqrt{f} \right)'(x) \right| \leq M(\alpha)$  est encore valable si  $x \in A$  est tel que  $f(x) = 0$ , car alors le membre de gauche est nul (et le membre de droite positif).

Ainsi, si  $x \in A$  est tel que  $|x - x_0| \leq \alpha$ , on a  $\left| \left( \sqrt{f} \right)'(x) \right| \leq M(\alpha)$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $f''(x_0) = 0$ ,  $M(\alpha) \rightarrow 0$ , quand  $\alpha \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\left( \sqrt{f} \right)'(x) \rightarrow 0, \text{ quand } x \rightarrow x_0.$$

D'où la continuité de  $\left( \sqrt{f} \right)'$  en  $x_0$ .

4. **Analyse.** Si  $f$  est telle que  $\sqrt{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on doit déjà avoir  $\sqrt{f}$  dérivable en tout point. D'après la question 2, c'est équivalent à demander que  $f''(x) = 0$  en tous les

$x$  tels que  $f(x) = 0$ .

**Synthèse.** On suppose cette condition vérifiée. D'après la question précédente,  $\sqrt{f}'$  est alors continue en tous les  $x$  tels que  $f(x) = 0$ . De plus, si  $x$  est tel que  $f(x) > 0$ ,  $f$  est strictement positive (et de classe  $\mathcal{C}^1$ ) sur un voisinage de  $x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; par composition,  $\sqrt{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $x$ .

**Bilan.** Ainsi,  $\sqrt{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ssi  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0) \implies (f''(x) = 0)$ .

## 1.2 Un contre-exemple pour une meilleure régularité

5. On montre cette propriété par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

**Initialisation.** Par linéarisation, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $s(x) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{2}$ . On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, s^{(1)}(x) = s'(x) = -\frac{\pi \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^2}.$$

Donc,  $p_1 = 0$  et  $q_1 = -1/2$  conviennent.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que la propriété est satisfaite. Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . On dérive la relation en  $x$  :

$$s^{(n+1)}(x) = \frac{p_n'(x) \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) + \frac{2\pi p_n(x)}{x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) + q_n'(x) \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) - \frac{2\pi q_n(x)}{x^2} \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^{2n}} - 2n \frac{p_n(x) \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) + q_n(x) \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^{2n+1}}.$$

On peut tout réduire au dénominateur  $x^{2n+2}$  et rassembler les termes en  $\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$  et ceux en  $\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ . On trouve que

$$s^{(n+1)}(x) = \frac{p_{n+1}(x) \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) + q_{n+1}(x) \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^{2n+2}},$$

où  $p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - 2\pi q_n(x) - 2nx p_n(x)$  et  $q_{n+1}(x) = x^2 q_n'(x) + 2\pi p_n(x) - 2nx q_n(x)$ . Ceci conclut la récurrence.

6. On applique la formule de Leibniz ( $\phi$  et  $s$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi^{(n-k)} (s^{(k)} + \phi^{(k)}).$$

7. La formule de Taylor-Young, écrite à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $\phi^{(k)}$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ ) donne :

$$\phi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\phi^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + o(x^n) = o(x^n),$$

quand  $x \rightarrow 0$ . Autrement dit,  $\frac{\phi^{(k)}(x)}{x^n} \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow 0$ .

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $p_n$  et  $q_n$  trouvées à la question 5. sont continues car polynomiales, donc bornées sur  $[-1, 1]$ , par le théorème des bornes atteintes. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , les termes  $\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$  et  $\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$  sont bornés par 1 en valeur absolue, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . On en déduit qu'on peut trouver une constante  $A_n > 0$  telle que :

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, |s^{(n)}(x)| \leq \frac{A_n}{|x|^{2n}}.$$

Cette estimation est aussi valable pour  $n = 0$  car  $|s(x)| \leq 1$  pour tout  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a donc, pour tout  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  :

$$|\phi^{(n-k)}(x)s^{(k)}(x)| \leq A_k \frac{\phi^{(n-k)}(x)}{|x|^{2k}}.$$

Par la question précédente et par théorème d'encadrement,  $\phi^{(n-k)}(x)s^{(k)}(x) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow 0$ . De plus, on a aussi  $\phi^{(n-k)}(x)\phi^{(k)}(x) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow 0$ , car  $\phi$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et que toutes ses dérivées sont nulles en 0.

Par la formule trouvée à la question 6. et par opérations élémentaires sur les limites, on en déduit que  $f^{(n)}(x) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow 0$ .

Ainsi,  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et toutes les dérivées  $f^{(n)}$  ont une limite nulle en 0. Par le théorème de prolongement de la régularité  $\mathcal{C}^\infty$ , le prolongement continu de  $f$  défini par  $f(0) = 0$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

9. On utilise à nouveau la formule de la question 6. Comme  $\phi$  est constante sur un voisinage de  $1/n$ , les dérivées  $\phi^{(k)}(1/n)$  sont toutes nulles pour  $k \geq 1$ . De plus,  $s(1/n) = \sin^2(n\pi) = 0$ . La formule pour  $s'$  a été donnée plus haut et on obtient  $s'(1/n) = 0$ . Enfin,

$$s''(x) = \frac{2\pi}{x^3} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) + \frac{2\pi^2}{x^4} \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

. D'où  $s''(1/n) = 2\pi^2 n^4$ . On obtient :

- $f(1/n) = \phi(1/n)^2$  ;
- $f'(1/n) = \phi(1/n)s'(1/n) = 0$  ;
- $f''(1/n) = \phi(1/n)s''(1/n) = 2\phi(1/n)n^4\pi^2$ .

10. Comme  $f = g^2$ , on a  $f' = 2gg'$ , puis  $f'' = 2gg'' + 2g'^2$ . Comme  $f'(1/n) = 0$  et que  $f(1/n) \neq 0$ , on a  $g'(1/n) = 0$ . Donc,  $f''(1/n) = 2g(1/n)g''(1/n) = 2\phi(1/n)g''(1/n)$ . Avec l'expression trouvée pour  $f''(1/n)$ , on obtient :  $g''(1/n) = n^4\pi^2$ .

11. Si  $g$  était de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $g''$  serait bornée sur  $[0, 1]$  par le théorème des bornes atteintes. Mais, d'après la question précédente,  $g''(1/n) \rightarrow +\infty$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ . C'est absurde. Donc,  $g = \sqrt{f}$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ .

## 2 Fonction $\Gamma$ et théorème de Bohr-Mollerup

### 2.1 Définition de $\Gamma$

#### 1. Croissance de $(\Pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(a) Par opérations usuelles,  $f_a$  est dérivable sur  $[-1, +\infty[$ , de dérivée  $f'_a : x \mapsto \frac{a}{1+ax}$ .

Comme cette dérivée est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f_a$  est concave.

Notons  $\tau$  la fonction définie sur  $[-1, +\infty[\setminus\{0\}$  par  $\tau(x) = \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \frac{f_a(x)}{x}$ .

Par concavité de  $f_a$ ,  $\tau$  est décroissante sur son ensemble de définition.

Or  $\tau(-1) = -\ln(1-a)$  et, si  $x > 0$ ,  $\tau(x) = \frac{\ln(1+ax)}{x}$ .

On a donc  $-\ln(1-a) \geq \frac{\ln(1+ax)}{x}$ . On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant par  $x > 0$ .

(b) On prend  $a = \frac{1}{n+1}$  dans la question précédente. On a :

$$\forall x > 0, \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \leq -x \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

On conclut en remarquant que

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(c) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} &= \frac{(n+1)^x (n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)} \times \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n^x n!} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{n+1}{x+n+1}. \end{aligned}$$

Tous les facteurs sont strictement positifs ; on a :

$$\ln\left(\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)}\right) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \geq 0,$$

d'après la question précédente.

On en déduit que  $\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} \geq 1$  ; donc que la suite  $(\Pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

#### 2. Majoration de $(\Pi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(a) La fonction  $t \mapsto \ln(1+t)$  est concave sur son ensemble de définition car sa dérivée  $t \mapsto \frac{1}{1+t}$  est décroissante. La tangente en 0 a pour équation  $t \mapsto t$  ; on en déduit que  $\ln(1+t) \leq t$ , pour tout  $t \in ]-1, +\infty[$ , en particulier pour tout  $t \in [0, x]$ .

Soit  $t \in [0, x]$ . La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\ln(1+t) = t + \int_0^t (t-u) \frac{-1}{(1+u)^2} du.$$

Pour  $u \in [0, t]$ , on a  $\frac{1}{(1+u)^2} \leq 1$  et donc

$$\ln(1+t) \geq t - \int_0^t (t-u)du = t - \frac{t^2}{2}.$$

Donc,  $A = \frac{1}{2}$  convient.

(b) Par les propriétés du logarithme, on a

$$\ln(x\Pi_n(x)) = x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) = x \ln n - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

(c) On applique l'inégalité de la question (a) (pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a bien  $\frac{x}{k} \in [0, x]$  et – de toute façon – on a vu que la constante  $A$  était indépendante de  $x$ ). On a :

$$\ln(x\Pi_n(x)) \geq x \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{x}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{k^2} = x \left( \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{x^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Avec les deux faits admis, le membre de droite converge, quand  $n \rightarrow +\infty$  ; en particulier, le membre de droite est majoré indépendamment de  $n$ . On en déduit qu'il existe une constante  $C(x) > 0$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(x\Pi_n(x)) \leq C(x).$$

Et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Pi_n(x) \leq \frac{e^{C(x)}}{x}$ .

## 2.2 Théorème de Bohr-Mollerup

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Pi_n(1) = \frac{n \times n!}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Donc,  $\Gamma(1) = \lim_n \Pi_n(1) = 1$ .

4. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On a

$$\Pi_n(x+1) = \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} = \frac{nx}{(x+n+1)}\Pi_n(x).$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , le membre de gauche converge vers  $\Gamma(x+1)$ , celui de droite vers  $x\Gamma(x)$ . Donc,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , par unicité de la limite.

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^{n-1} k = (n-1)!$$

par télescopage.

6. Avec le calcul de 2.(b), pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\ln(\Pi_n(x)) = x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k).$$

La fonction  $x \mapsto x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k$  est affine donc convexe. Toutes les fonctions  $x \mapsto -\ln(x+k)$  sont convexes. Comme une somme de fonctions convexes est convexe, on en déduit par récurrence immédiate que  $\ln(\Pi_n(x))$  est convexe.

7. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ , soit  $t \in [0, 1]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par convexité de  $\ln \circ \Pi_n$ , on a :

$$\ln(\Pi_n(tx + (1-t)y)) \leq t \ln(\Pi_n(x)) + (1-t) \ln(\Pi_n(y)).$$

Par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que

$$\ln(\Gamma(tx + (1-t)y)) \leq t \ln(\Gamma(x)) + (1-t) \ln(\Gamma(y)).$$

Comme c'est vrai pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\ln \circ \Gamma$  est convexe.

8. Comme  $n+x \leq n+1$ , la comparaison des taux d'accroissement de  $\ln \circ f$  entre  $n$  et  $n+x$  d'une part, et  $n$  et  $n+1$  d'autre part donne :

$$\frac{\ln f(n+x) - \ln f(n)}{x} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{1}.$$

De plus, comme  $f(n+1) = nf(n)$ , le membre de droite vaut  $\ln n$ . On a donc :

$$\ln f(n+x) - \ln f(n) \leq x \ln n.$$

On passe à l'exponentielle (croissante) pour obtenir l'inégalité :

$$\frac{f(n+x)}{f(n)} \leq n^x.$$

De même, utilisant cette fois que  $n-1 \leq n+x$ , on a

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{1} \leq \frac{\ln f(n+x) - \ln f(n)}{x}.$$

Le membre de droite se simplifie en  $\ln(n-1)$ . On multiplie par  $x$  et on passe à l'exponentielle pour obtenir :

$$(n-1)^x \leq \frac{f(n+x)}{f(n)}.$$

9. En utilisant que  $f(1) = 1$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n+1) = nf(n)$ , on obtient comme précédemment que  $f(n) = (n-1)!$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . De même, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n+1+x) = (n+x)f(n+x)$ , on obtient par récurrence immédiate :

$$f(n+x) = f(x)x(x+1)\dots(x+n-1).$$

On a donc montré à la question précédente l'encadrement suivant (tout est positif) :

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Le membre de gauche est  $\Pi_{n-1}(x)$ . Celui de droite est  $\frac{n+x}{n}\Pi_n(x)$ , ce qui conclut.

10. On passe à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans les inégalités précédentes et on obtient  $\Gamma(x) \leq f(x) \leq \Gamma(x)$ . Donc,  $f(x) = \Gamma(x)$ . Comme c'est vrai pour tout  $x > 0$ ,  $f = \Gamma$ .

### 2.3 Formule intégrale pour $\Gamma$

11. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\Gamma_n(1) = \int_{1/n}^n e^{-t} dt = -e^{-n} + e^{-1/n}$ . Donc,  $\Gamma_n(1) \rightarrow 1$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .

12. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fait une intégration par parties :

$$\Gamma_n(x+1) = \int_{1/n}^n t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{1/n}^n + x \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Donc,  $\Gamma_n(x+1) = \frac{e^{-n}}{n^x} - n^x e^{-n} + \Gamma_n(x)$ . Quand,  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{e^{-n}}{n^x} \rightarrow 0$  par opérations élémentaires et  $n^x e^{-n} \rightarrow 0$  par théorème de croissance comparée.

Ainsi, la suite  $(\varepsilon_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général  $\varepsilon_n(x) = \frac{e^{-n}}{n^x} - n^x e^{-n}$  convient.

13. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $u_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$ .

Par l'inégalité de Hölder donnée dans l'énoncée, on a :

$$\sum_{k=1}^n f(u_{n,k})g(u_{n,k}) \leq \left( \sum_{k=1}^n |f(u_{n,k})|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |g(u_{n,k})|^q \right)^{1/q}.$$

On divise par  $n$  et on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_{n,k})g(u_{n,k}) \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(u_{n,k})|^p \right)^{1/p} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |g(u_{n,k})|^q \right)^{1/q}$$

car  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On reconnait trois sommes de Riemann pour les fonctions continues  $fg$ ,  $f^p$  et  $g^q$ . En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\int_a^b fg \leq \left( \int_a^b f^p \right)^{1/p} \left( \int_a^b g^q \right)^{1/q}.$$

14. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . On peut écrire  $\lambda = \frac{1}{p}$ , pour un réel  $p > 1$  et alors

$1 - \lambda = \frac{1}{q}$  avec  $q > 1$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On a

$$\Gamma_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \int_{1/n}^n t^{x/p+y/q} e^{-t} dt = \int_{1/n}^n t^{x/p} e^{-t/p} \times t^{y/q} e^{-t/q} dt$$

car  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . L'inégalité démontrée à la question précédente donne alors :

$$\Gamma_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \left( \int_{1/n}^n t^x e^{-t} \right)^{1/p} \left( \int_{1/n}^n t^y e^{-t} \right)^{1/q} = \Gamma_n(x)^\lambda \Gamma_n(y)^{1-\lambda}.$$

On passe au logarithme (fonction croissante) et on obtient la convexité de  $\ln \circ \Gamma_n$ .

15. Soit  $x > 0$ . La fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a l'inclusion  $[\frac{1}{n+1}, n+1] \subset [\frac{1}{n}, n]$ . On en déduit que la suite  $(\Gamma_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante (en utilisant une relation de Chasles).

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a 
$$\int_{1/n}^1 t^{x-1}e^{-t} dt \leq \int_{1/n}^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Par croissance comparée, la fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t/2}$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Donc, il existe  $t_0 > 0$  tel que si  $t \geq t_0$ ,  $t^{x-1}e^{-t/2} \leq 1$ . De plus, cette fonction est bornée sur  $[0, t_0]$  par le théorème des bornes atteintes. On peut donc trouver une constante  $M > 0$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $t^{x-1} \leq Me^{-t/2}$ . On en déduit que

$$\int_1^n t^{x-1}e^{-t} dt \leq M \int_1^n e^{-t/2} dt = 2M(e^{-1/2} - e^{-n/2}) \leq 2Me^{-1/2}.$$

On obtient finalement que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Gamma_n(x) \leq \frac{1}{x} + 2Me^{-1/2}.$$

Ainsi, la suite  $(\Gamma_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée ; elle converge donc.

16. On note  $f(x)$  la limite de  $\Gamma_n(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $x > 0$ . Par passage à la limite dans les questions 11 et 12, on a  $f(1) = 1$  et, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x+1) = xf(x)$ . Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\ln \circ \Gamma_n$ , c'est aussi le cas de  $\ln \circ f$ , en utilisant le même argument qu'à la question 7.

Ainsi,  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  vérifie les propriétés énoncées au début de la partie 2.2. Par le théorème de Bohr-Mollerup, on a  $f = \Gamma$ . Et donc,  $\Gamma_n(x) \rightarrow \Gamma(x)$ , pour tout  $x > 0$ .