DS 5 de mathématiques

Durée : 4h.

- Les calculatrices et autres technologies sont interdites.
- Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement. La copie doit être lisible, les pages numérotées, les calculs suffisamment détaillés, les résultats mis en valeur...
- Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Théorème de Glaeser[1]

On s'intéresse à la régularité de $\sqrt{f}$, en fonction de conditions de régularité sur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Les deux parties du problème sont essentiellement indépendantes.

1.1 Condition pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On cherche à établir une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0 et exprimer $\left(\sqrt{f}\right)'(x_0)$ en fonction de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
   (a) Montrer que $f'(x_0) = 0$.
   (b) Montrer que $\dfrac{f(x_0 + h)}{h^2} \to \dfrac{f''(x_0)}{2}$, quand $h \to 0$.
   (c) En déduire que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0 si, et seulement si, $f''(x_0) = 0$.
   Préciser la valeur de $\left(\sqrt{f}\right)'(x_0)$ dans ce cas.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.
Soit $\alpha > 0$. On note $I(\alpha) = [x_0 - 2\alpha, x_0 + 2\alpha]$ et $M(\alpha) = \sup\left\{|f''(x)|, x \in I(\alpha)\right\}$.

[1] Georges Glaeser (1918–2002), mathématicien français

3. Soit $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
   (a) Soit $h \in [-\alpha, \alpha]$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que
   $$f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{M(\alpha)}{2} \geq 0.$$

   On suppose $M(\alpha) > 0$.

   (b) Montrer que le trinôme $h \mapsto f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{M(\alpha)}{2}$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en un h tel que $|h| \leq \alpha$.
   (c) En déduire que $(f')^2(x) \leq 2f(x)M(\alpha)$.
   (d) En déduire que $(\sqrt{f})'$ est continue en x_0.
   Montrer que la conclusion persiste si $M(\alpha) = 0$.
4. Conclure, en donnant une CNS sur f pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

1.2 Un contre-exemple pour une meilleure régularité

On cherche à construire un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées en 0 sont nulles mais telle que $\sqrt{f}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.
On admet l'existence d'une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\phi^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- ϕ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ est constante au voisinage de $\frac{1}{n}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \delta \in \,]0, 1/n[\, : \forall x \in [1/n - \delta, 1/n + \delta]\,, \phi(x) = \phi\left(1/n\right).$$

On définit s et f sur $\mathbb{R}^*$ par $s(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ et $f(x) = \phi(x)\big(s(x) + \phi(x)\big)$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux fonctions polynomiales p_n et q_n telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, s^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) + q_n(x)\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{x^{2n}}.$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(n)}$ en fonction des dérivées $\phi^{(k)}$ et $s^{(k)}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.
7. Montrer que, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\phi^{(k)}(x)}{x^n} \to 0$, quand $x \to 0$.
8. En déduire que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On suppose par l'absurde que $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Exprimer $f(1/n)$, $f'(1/n)$ et $f''(1/n)$ en fonction de $\phi(1/n)$ et n.
10. En déduire la valeur de $g''(1/n)$.
11. Conclure.

2 Fonction Γ et théorème de Bohr[2]-Mollerup[3]

2.1 Définition de Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction Π_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Pi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

1. **Croissance de $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   (a) Soit $a \in]0,1[$. On définit f_a sur $[-1,+\infty[$ par $f_a(x) = \ln(1+ax)$.
   Montrer que f_a est concave. En déduire que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(1+ax) \leq -x\ln(1-a).$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$x \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

   (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. **Majoration de $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.** On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall t \in [0,x], t - At^2 \leq \ln(1+t) \leq t$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ln\big(x\Pi_n(x)\big)$ en fonction notamment de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

   On admet que les deux suites $\left(\ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $\big(\Pi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Par théorème de la limite monotone, on peut ainsi définir une fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) > 0$ car la suite $\big(\Pi_n(x)\big)$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Théorème de Bohr-Mollerup

On cherche à montrer le théorème suivant : Γ est l'unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

[2] Harald Bohr (1887-1951), mathématicien et footballeur danois, frère du prix Nobel de physique Niels Bohr
[3] Johannes Mollerup (1872-1937), mathématicien danois

- $f(1) = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x)$;
- $\ln \circ f$ est convexe.

3. Montrer que $\Gamma(1) = 1$.
4. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, établir une relation entre $\Pi_n(x+1)$ et $\Pi_n(x)$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
5. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\ln \circ \Pi_n$ est convexe.
7. En déduire que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

On considère maintenant une fonction f vérifiant les propriétés énoncées plus haut.

8. Soient $x \in]0,1[$, $n \geq 2$. En comparant les taux d'accroissement de $\ln \circ f$ entre n et d'autres points bien choisis, montrer que :
$$(n-1)^x \leq \frac{f(n+x)}{f(n)} \leq n^x.$$
9. En déduire que : $\Pi_{n-1}(x) \leq f(x) \leq \dfrac{n+x}{n}\Pi_n(x)$.
10. En déduire que $f = \Gamma$.

2.3 Formule intégrale pour Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction Γ_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} t^{x-1}e^{-t}dt$.

11. Montrer que $\big(\Gamma_n(1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.
12. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une suite $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de limite nulle, telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x) + \varepsilon_n(x).$$

On admet la formule de Hölder démontrée en TD. Si $p, q > 1$ sont tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $a_1, \dots, a_n$; $b_1, \dots, b_n$ sont des réels, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{1/q}$.

13. Montrer que si f, g sont des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et si $p, q > 1$ vérifient $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $\displaystyle\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}$.
14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\ln \circ \Gamma_n$ est convexe.
15. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\big(\Gamma_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
16. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma_n(x) \to \Gamma(x)$, quand $n \to +\infty$.