

## Semaine 14 - Polynômes

*Le cours sur les polynômes a été entièrement fait mais peu d'exercices ont été traités.*

### 1 Révisions d'analyse

Avec accent sur la dérivabilité, la convexité et l'intégration.

### 2 Présentation de $\mathbb{K}[X]$

- Définition de  $\mathbb{K}[X]$  comme ensemble des suites à support fini. *Rien d'exigible.*
- $\mathbb{K}[X]$  est un anneau commutatif intègre
- Degré d'un polynôme, degré d'une somme, d'un produit
- Inversibles de  $\mathbb{K}[X]$ , polynômes associés
- Composition de deux polynômes, évaluation d'un polynôme en  $a \in \mathbb{K}$
- Polynômes et applications polynomiales
- Polynôme dérivé, opérations usuelles
- Formule de Taylor formelle *sur un corps de caractéristique nulle*

### 3 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

- Relation de divisibilité
- Existence et unicité de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$
- Idéal dans un anneau commutatif, idéal principal, anneau principal
- $\mathbb{K}[X]$  est un anneau principal
- PGCD de  $A$  et  $B$ , défini comme un générateur de l'idéal  $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ . La notation  $A \wedge B$  désigne le générateur unitaire (ou 0 si  $A$  et  $B$  sont nuls)
- PPCM de  $A$  et  $B$ , défini comme un générateur de l'idéal  $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ . La notation  $A \vee B$  désigne le générateur unitaire (ou 0 si  $A$  ou  $B$  est nul)
- Extension à un nombre fini de polynômes et propriétés usuelles
- Polynômes premiers entre eux, identité de Bézout
- Propriétés usuelles, dont lemme de Gauss
- Polynômes irréductibles, exemple de  $X - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$
- Propriétés usuelles, dont lemme d'Euclide

- Tout polynôme non nul admet une unique écriture (à l'ordre près des facteurs)  $\lambda \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$ , où les  $P_i$  sont des polynômes irréductibles unitaires, les  $n_i$  sont des entiers naturels et  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ .

## 4 Racines d'un polynôme

- Racine  $\alpha$  d'un polynôme  $P$ ;  $P$  a  $\alpha$  pour racine ssi  $X - \alpha$  divise  $P$
- Si  $P$  a  $r$  racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  deux à deux distinctes, il est divisible par  $\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$
- Un polynôme de degré  $d \in \mathbb{N}$  a au plus  $d$  racines
- Multiplicité d'une racine, vocabulaire correspondant
- Si  $P$  a  $r$  racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  deux à deux distinctes de multiplicité respective  $m_1, \dots, m_r$ , il est divisible par  $\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$
- En comptant les multiplicités, un polynôme a au plus autant de racines que son degré
- Polynômes scindés, scindés à racines simples
- *Sur un corps de caractéristique nulle*,  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$  ssi  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ .
- Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est scindé/scindé à racines simples,  $P'$  aussi.
- Corps algébriquement clos
- $\mathbb{C}$  est algébriquement clos (*démonstration hors-programme*)
- Description des polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , dans  $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  ou de  $\mathbb{R}[X]$  en produit d'irréductibles
- Polynômes d'interpolation de Lagrange
- Relations coefficients-racines

## 5 Questions de cours

- Formule de Taylor formelle
- Calcul d'une division euclidienne/d'un PGCD/d'une relation de Bézout entre deux polynômes
- $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité au moins  $m$  ssi  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ .
- Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est scindé/scindé à racines simples,  $P'$  aussi.