Algèbre linéaire, théorie générale

Jeremy Daniel

> Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says : "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul : give up geometry and you will have this marvelous machine".
>
> Michael Atiyah

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque.
Quand ce n'est pas explicitement précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel

Exemples 1.1
- $E = \mathbb{K}^n$, ensemble des n-uplets dans $\mathbb{K}$;
- $E = \mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- L'ensemble E des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{K}$: c'est-à-dire l'ensemble des éléments $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant un système d'équations de la forme $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0$, où les $a_{i,j}$ sont des constantes dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble E des solutions d'une équation différentielle homogène $y'' = ay' + by$, où a et b sont des constantes fixées dans $\mathbb{K}$ et y est une fonction inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$;
- L'ensemble E des suites (u_n) récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = au_n + bu_{n+1},$$

où a et b sont des constantes fixées dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.2
Dans tous ces exemples :

– E est stable par somme ; c'est-à-dire que la somme de deux éléments de E est encore dans E.
– E est stable par multiplication par une constante dans $\mathbb{K}$: le produit d'un élément de E et d'une constante dans $\mathbb{K}$ est dans E.

Définition 1.3 (Espace vectoriel)
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E, muni d'une loi de composition interne notée $+$: $\begin{cases} E \times E \to E, \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$ et d'une application $\cdot$: $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E, \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \end{cases}$ appelée multiplication externe, tel que :
– $(E,+)$ est un groupe commutatif ;
– $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- $\alpha \cdot (x+y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$
- $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$.

Définition 1.4 (Vecteurs, scalaires)
Les éléments de E sont les vecteurs ; les éléments de $\mathbb{K}$ sont les scalaires.

Remarque 1.5
Le plus souvent, on nomme les vecteurs avec des lettres latines et les scalaires avec des lettres grecques.

Attention !
Ne pas confondre les structures sur $\mathbb{K}$ et sur E :
– Comme $\mathbb{K}$ et E sont des groupes commutatifs, il y a une loi $+$ dans $\mathbb{K}$ (l'addition usuelle des réels ou des complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et une loi $+$ dans E (l'addition des vecteurs, qui dépendra de l'espace vectoriel considéré). Par abus de notation, ces deux lois $+$ sont notées de la même façon.
– De même, il y a un élément neutre dans $\mathbb{K}$ (le zéro usuel) et un élément neutre dans E (un vecteur zéro) : on les note $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E, ou plus simplement 0 par abus de notation.
– Sur $\mathbb{K}$, on a une loi de composition interne appelée produit (le produit usuel sur les réels ou les complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Mais en général, il n'y a pas produit interne dans E : on ne multiplie pas ensemble deux vecteurs.
– Assez vite, on omettra la notation $\cdot$ pour la multiplication externe et on accolera simplement le scalaire et le vecteur que l'on multiplie.

Exemples 1.6
– Soit n un entier naturel. On définit $E = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{K}\}$. La somme est la somme usuelle entre n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

La multiplication externe est donnée par $\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, où α est dans $\mathbb{K}$.
En particulier, pour $n = 1$, $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ peut-être vu comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $n = 0$, $\mathbb{K}^0$ est un ensemble à un élément. C'est un (le) $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul.
- $E = \mathbb{K}[X]$. La somme est la somme de polynômes ; le produit externe est le produit par une constante. Le produit entre deux polynômes ne fait pas partie de la structure d'espace vectoriel.
- Soit X un ensemble quelconque, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère $F = \mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $f, g \in F$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, la somme et la multiplication externe sont définies par :
  - $(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x)$;
  - $(\alpha \cdot f) : x \mapsto \alpha \cdot \big(f(x)\big)$.

  Le cas le plus important est celui où $E = \mathbb{K}$.
- N'importe quel $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en restreignant la multiplication externe aux seuls réels.

Proposition 1.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, soit $x \in E$. Alors,

$$\alpha \cdot x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

Proposition 1.8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$\alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x).$$

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.9 (Sous-espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si
- F est un sous-groupe de $(E, +)$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

Définition 1.10 (Sous-espaces vectoriels triviaux)
L'espace E lui-même et le singleton $\{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, dits triviaux.

Remarque 1.11
Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on montre que :
- $0 \in F$;
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F$.

Proposition 1.12 (Stabilité par combinaisons linéaires)
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \forall x_1, \ldots, \forall x_n \in F, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k \in F.$$

Proposition 1.13 (Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)
Soit F un ssev de E. Muni des lois $+$ et $\cdot$ restreintes, F est un espace vectoriel.

Remarque 1.14
Pour montrer qu'un ensemble a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemples 1.15
- $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.
- Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $Q\mathbb{K}[X] = \{QP, P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathbb{K}[X]$.
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une chaîne d'inclusion de sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
- Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{cases}$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  Géométriquement, cet ensemble est une droite vectorielle si les deux équations ne sont pas proportionnelles ; un plan vectoriel si les deux équations sont proportionnelles mais que l'une au moins est non nulle ; $\mathbb{R}^3$ si toutes les constantes sont nulles.

Proposition 1.16 (Intersection de sous-espaces vectoriels)
Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Alors, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.17 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)
Soit A une partie de E. Il existe un plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. C'est le sous-espace vectoriel engendré par A.

Notation 1.18
On note $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A.

Définition 1.19 (Droite vectorielle)
On appelle droite vectorielle de E un ssev engendré par un vecteur non nul.

Définition 1.20 (Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Une combinaison linéaire d'éléments de cette famille est un vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i u_i$, où pour tout $i\in I$, $\lambda_i\in\mathbb{K}$.

Définition 1.21 (Famille à support fini de scalaires)
Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires est dite à support fini (ou presque nulle) si l'ensemble $J=\{i\in I \mid \lambda_i\neq 0\}$ est fini.

Notation 1.22
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble de ces familles.

Définition 1.23 (Combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Une combinaison linéaire d'éléments de cette famille est une vecteur de la somme $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i u_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Remarques 1.24
- La somme est définie en ne considérant que les indices pour lesquels $\lambda_i\neq 0$. Les règles de calculs usuelles restent valables.
- Autrement dit, une combinaison linéaire d'éléments de $(u_i)_{i\in I}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $(u_j)_{j\in J}$, où J est une partie finie (quelconque) de I.

Remarque 1.25
On peut associer à toute partie A d'un ensemble E la famille $(a)_{a\in A}$, famille d'éléments de E. Ainsi, une notion sur les familles d'éléments de E donne une notion sur les parties de E. En particulier, si A est une partie d'un espace vectoriel E, on pourra parler de combinaisons linéaires d'éléments de A.

Théorème 1.26 (Ensemble des combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel engendré)
Soit A une partie de E. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*

Exercice 1.27
Décrire le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^3$.

Exemples 1.28
- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}\left\{(1,0)\right\}=\left\{(x,0),x\in\mathbb{R}\right\}$. C'est la droite des abscisses.
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}\left\{(1,\alpha,0),(2,\alpha,0)\right\}=\left\{(\lambda+2\mu,(\lambda+\mu)\alpha,0,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. C'est une droite vectorielle si $\alpha=0$, un plan vectoriel si $\alpha\neq 0$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}\left\{1,X,X^2,\dots,X^n\right\}=\mathbb{R}_n[X]$.

1.3 Application linéaire

DÉFINITION 1.29 (Application linéaire)
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$-linéaire (ou simplement linéaire) si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

PROPOSITION 1.30 (Application linéaire et combinaisons linéaires)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini de scalaires, on a :

$$f\big(\sum_{i\in I} \lambda_i u_i\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(u_i).$$

NOTATION 1.31
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

EXEMPLES 1.32
- $\psi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to, \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f'$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
- $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ est $\mathbb{K}$-linéaire.
- Les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont les applications de la forme $f_a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, u \mapsto au$, où a est un élément de $\mathbb{K}$
- $\psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

EXERCICE 1.33
Montrer que les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^2$ sont les applications de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 \\ (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \end{cases}$$

où a, b, c, d sont dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 1.34
Si $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$-linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

PROPOSITION 1.35 (Image directe et réciproque de ssev)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- *Si $E_1 \subset E$ est un ssev de E alors $f(E_1)$ est un ssev de F.*
- *Si $F_1 \subset F$ est un ssev de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un ssev de E.*

DÉFINITION 1.36 (Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme.
- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.

- Si $E = F$ et si f est bijective, on dit que f est un automorphisme.

Notation 1.37
On abrège $\mathcal{L}(E, E)$ en $\mathcal{L}(E)$. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on note $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ l'application identité de E.

Proposition 1.38 (L'ensemble des applications linéaires est un espace vectoriel)
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Proposition 1.39 (Linéarité des opérateurs de composition)
Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.
De plus, les applications suivantes sont linéaires :

$$\psi_f : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{L}(F, G) & \to \mathcal{L}(E, G) \\ v & \mapsto v \circ f \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \phi_g : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{L}(E, F) & \to \mathcal{L}(E, G) \\ u & \mapsto g \circ u \end{array} \right.$$

Corollaire 1.40 ($\mathcal{L}(E)$ est un anneau)
$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau.*

Exercice 1.41
Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on note $d : E \to E, P \mapsto P'$ et $m : E \to E, P \mapsto X \times P$.
1. Montrer que d et m sont linéaires.
2. Calculer dm et md.
3. On note $\pi_n : E \to E$ l'application qui à $P \in E$ associe le reste de P dans la division euclidienne par X^n. Montrer que π_n est linéaire et calculer $d^n \pi_n$.

Proposition 1.42 (Bijection réciproque d'un isomorphisme)
Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme.

Corollaire 1.43 ($\mathrm{GL}(E)$ est un groupe)
$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Définition 1.44 (Noyau et image)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$.
- L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E : f(u) = v\}$.

Proposition 1.45 (Noyau et injectivité)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ *est un ssev de E ; il est réduit à $\{0_E\}$ ssi f est injective.*

Remarque 1.46
On peut aussi s'intéresser aux ensembles $E_y = f^{-1}\big(\{y\}\big)$, pour y quelconque dans F.

- Si E est un espace vectoriel, on appelle sous-espace affine (non vide) A de E toute partie de E de la forme $u + E'$, où u est un vecteur de E et E' est un ssev de E.
- Avec ces notations, E' est la direction du sous-espace affine A. De façon intrinsèque, $E' = \big\{b - a, (a, b) \in A^2\big\}$.
- Si $f : E \to F$, l'ensemble $E_y = f^{-1}\big(\{y\}\big)$ est ou bien vide ou bien un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

Proposition 1.47 (Image et surjectivité)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
L'image $\operatorname{Im}(f)$ est un ssev de F ; elle est égale à à F ssi f est surjective.

Exemples 1.48

- Soit $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$. Alors d n'est pas injective : on a $d(1) = 0$ donc $1 \in \operatorname{Ker}(d)$.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. On résout $f(x, y) = 0$ et on trouve qu'on a une solution non nulle si, et seulement si $ad - bc = 0$. Donc f est injective si, et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, f est un automorphisme (on a un système de Cramer).
- Soit $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe l'application polynomiale $x \mapsto P(x)$. On a vu dans le cours sur les polynômes que ψ est injective ssi $\mathbb{K}$ est infini.

2 Décomposition en sous-espaces

2.1 Supplémentaire et produit

Définition 2.1 (Somme de deux ssev)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On note $F + G$ le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$. C'est la somme de F et G.

Proposition 2.2
La somme $F + G$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.

Proposition 2.3 (Équivalences pour la somme directe)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux proposition suivantes sont équivalentes :

1. $F \cap G = \{0\}$;
2. $\forall z \in F + G, \exists!\, (x, y) \in F \times G : z = x + y$.

Définition 2.4 (Somme directe de deux ssev)
Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, on dit que F et G sont en somme directe.

On écrit alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Exemple 2.5
Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de E.
Si D_1 et D_2 sont distinctes, alors elles sont en somme directe.

Définition 2.6 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si $E = F \oplus G$.

Exemples 2.7

- Deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
- Un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans le plan sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons F le sous-espace vectoriel constitué par les fonctions paires, G celui constitué par les fonctions impaires.
  Alors F et G sont supplémentaires dans E.
- Considérons $E = \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors $F = P\mathbb{K}[X]$ et $G = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires.

Définition 2.8 (Espace vectoriel produit)
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ donnée par :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) =& (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ \lambda \cdot (x_1, x_2) =& (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2),\end{aligned}$$

où les x_i et y_i sont dans E_i et λ est dans $\mathbb{K}$.

Remarque 2.9
On peut généraliser à un produit fini (ou bien infini) d'espaces vectoriels.

Proposition 2.10 (Produit, somme et supplémentaire)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $\phi : F \times G \to E, (u, v) \mapsto u + v$ est un isomorphisme ssi F et G sont supplémentaires dans E.

Théorème 2.11 (Applications linéaires et supplémentaires)
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit F un espace vectoriel. Alors, $\psi \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{L}(E, F) & \to \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F) \\ f & \mapsto (f_{|E_1}, f_{|E_2}) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Remarque 2.12
On peut généraliser à un nombre fini de sous-espaces. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces

vectoriels de E.

- $F_1 + \cdots + F_p$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_p$.
- C'est l'ensemble des éléments de la forme $u_1 + \cdots + u_p$, où les u_i sont dans F_i.
- Si $\forall u \in F_1 + \cdots + F_p, \exists!(u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u = u_1 + \cdots + u_p$, on dit que la somme est directe et on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ au lieu de $F_1 + \cdots + F_p$.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, alors $\left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{L}(E, F) & \to & \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i, F) \\ f & \mapsto & (f_{|E_i})_{i=1,\ldots,p} \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Attention !
Trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 peuvent être deux à deux en somme directe, sans qu'ils le soient pris ensemble. Considérer trois droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.13
Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a l'équivalence suivante :

1. *$F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe dans E ;*
2. *$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p : u_1 + \cdots + u_p = 0 \implies u_1 = \cdots = u_p = 0$;*
3. *$\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, F_i et $\sum_{k \neq i} F_k$ sont en somme directe.*

Théorème 2.14 (Théorème d'isomorphisme)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$.
Alors, l'application linéaire $\overline{f} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.

2.2 Projections et symétries

Définition 2.15 (Projection)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
L'unique application $\pi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\begin{gathered} \forall x \in F, \pi(x) = x \\ \forall y \in G, \pi(y) = 0 \end{gathered}$$

est la projection (ou le projecteur) sur F parallèlement à G.

Exemples 2.16

- $E = \mathbb{K}[X]$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Si $F = P\mathbb{K}[X]$ et $G = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a vu que $E = F \oplus G$. La projection π sur G parallèlement à F associe à un polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ son reste dans la division euclidienne par P.
- L'application $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$ est la projection sur l'axe des abscisses, parallèlement à l'axe des ordonnées.
- Soient $D_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $D_2 = \{(y, y), y \in \mathbb{R}\}$, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. La projection sur D_1 parallèlement à D_2 est donnée par $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$.

Théorème 2.17 (Caractérisation des projections)
On suppose que $E = F \oplus G$. Soit π la projection sur F parallèlement à G. Alors,

1. $\pi^2 = \pi$;
2. $F = \operatorname{Im} \pi$;
3. $G = \operatorname{Ker} \pi$.

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors,

1. $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$;
2. *p est la projection sur* $\operatorname{Im} p$*, parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$.

Définition 2.18 (Symétrie)
On suppose $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. L'unique application $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in F, s(x) = x$$
$$\forall y \in G, s(y) = -y$$

est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exemple 2.19
On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La conjugaison complexe est la symétrie par rapport à l'axe des réels, parallèlement à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 2.20
Considérons une décomposition $E = F \oplus G$ et notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Théorème 2.21 (Caractérisation des symétries)
On suppose $E = F \oplus G$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors

1. $s^2 = \mathrm{Id}_E$;
2. $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$;
3. $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Réciproquement, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors

1. $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$
2. *s est la symétrie par rapport à* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2.22
Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère F et G les sous-espaces vectoriels constitués par les polynômes pairs et impairs. Identifier la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

2.3 Formes linéaires et hyperplans

Définition 2.23 (Forme linéaire)
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Notation 2.24
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemples 2.25
- Sur $E = \mathbb{R}^3$, $l_1 : (x, y, z) \mapsto x$.
- Sur $E = \mathbb{K}[X]$, $l_2 : P \mapsto P'(0)$.
- Sur $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $l_3 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Définition 2.26 (Hyperplan)
On appelle *hyperplan* le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemples 2.27
Dans les exemples précédents :
- $\mathrm{Ker}(l_1) = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathrm{Ker}(l_2)$ est l'ensemble des polynômes dont le coefficient devant X est nul.
- $\mathrm{Ker}(l_3)$ est l'ensemble des fonctions de moyenne nulle sur $[0, 1]$.

Théorème 2.28 (Supplémentaire d'un hyperplan)
Soit H un hyperplan de E. Si $x \notin H$, $E = H \oplus \mathrm{Vect}\{x\}$.

Exemples 2.29
Dans les exemples précédents, on peut prendre :
- $u_1 = (1, 0, 0)$, on a $l_1(u_1) = 1 \neq 0$.
- $u_2 = X$, on a $l_2(u_2) = 1 \neq 0$.
- u_3 la fonction constante égale à 1. On a $l_3(u_3) = 1 \neq 0$.

Proposition 2.30 (Un hyperplan est maximal parmi les ssev stricts)
Soit H un hyperplan de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant H, alors $F = H$ ou $F = E$.