Semaine 15 – Algèbre linéaire

Pas de dimension finie, pas de pivot de Gauss, pas de matrices.

1 Polynômes

Révisions sur tout le chapitre. Aussi en lien avec l'algèbre linéaire.

2 Généralités

- Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$; vecteurs, scalaires
- Exemples basiques : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(A, E)$, où A ensemble et E espace vectoriel (cas particulier, $E = \mathbb{K}$; sous-cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$)
- Règles de calcul
- Sous-espace vectoriel
- Familles de scalaires à support fini, combinaisons linéaires
- Espace vectoriel engendré par une partie, définition *par le haut* et description comme ensemble de combinaisons linéaires
- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel
- Linéarité de la pré-composition et de la post-composition
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau ; $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe ; c'est le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$
- Noyau et image d'une application linéaire ; caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité

3 Décompositions d'un espace vectoriel

- Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels
- Somme directe, caractérisation
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires ; *lien avec un raisonnement par analyse/synthèse*
- Exemples : droite et plan vectoriels dans $\mathbb{R}^3$; fonctions paires et impaires ; si $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré d, idéal engendré par P et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$
- Produit de deux espaces vectoriels
- Si $E = F \oplus G$, E est isomorphe à $F \times G$

- Si $E = E_1 \oplus E_2$, se donner une application linéaire de E dans F revient à se donner une application linéaire de E_1 dans F et une application linéaire de E_2 dans F. Et cette correspondance est linéaire.
- Généralisation rapide de ces notions et des résultats aux cas d'un nombre fini de sous-espaces
- Projecteur (ou projection) sur un ssev parallèlement à un ssev
- Caractérisation des projecteurs comme idempotents de $\mathcal{L}(E)$
- Symétrie par rapport à un ssev parallèlement à un ssev
- Caractérisation des symétries comme involutions de $\mathcal{L}(E)$
- Exemples géométriques et algébriques
- Forme linéaire ; hyperplan, défini comme le noyau d'une forme linéaire non nulle
- Si H est un hyperplan et si $x \notin H$, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$
- Si F ssev tel que $H \subset F \subset E$, $F = H$ ou $F = E$

4 Familles de vecteurs

- Familles libres, génératrices, bases et leurs propriétés
- Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$
- Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathbb{K}[X]$, avec P_n de degré n, alors c'est une base de $\mathbb{K}[X]$
- Relations entre l'injectivité/la surjectivité/la bijectivité d'une application linéaire et la conservation du caractère libre/générateur d'une famille
- Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme ssi l'image de toute base de E est une base de F.
- Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = f_i$.

5 Exemples de questions de cours

- Une propriété reliant injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire et le caractère libre/générateur/base d'une famille
- Caractérisation des projecteurs, des symétries
- Si H est un hyperplan de E et si $x \notin H$, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire de H dans E.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est telle que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$, alors f est une homothétie (*fait en TD*).
- La famille $\big(x \mapsto e^{\alpha} x\big)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.