DM 12 - Interpolation polynomiale – Corrigé

1 Estimation fondamentale

1. Remarquons déjà que g s'annule en les x_i quelle que soit la valeur de u, car pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $f(x_i) = L_{f,\underline{x}}(x_i)$. On a $g(u) = 0 \iff f(u) - L_{f,\underline{x}}(u) - K_u \prod_{i=0}^{n}(u - x_i) = 0$. Une seule valeur de K_u convient :
$$K_u = \frac{f(u) - L_{f,\underline{x}}(u)}{\prod_{i=0}^{n}(u - x_i)}.$$

2. La fonction g s'annule en $n+2$ points distincts sur $[a,b]$. Par application du théorème de Rolle entre deux points consécutifs d'annulation de g, on en déduit que g' a $n+1$ points d'annulation distincts sur $[a,b]$. Par une récurrence finie rapide, on montre que $g^{(k)}$ s'annule $n+2-k$ fois sur $[a,b]$, pour $k \in [\![0,n+1]\!]$. En particulier, $g^{(n+1)}$ s'annule sur $[a,b]$.

3. $L_{f,\underline{x}}$ est un polynôme de degré n donc sa dérivée $(n+1)$-ème s'annule. La dérivée $(n+1)$-ème de $x \mapsto \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ est $(n+1)!$ car c'est une application polynomiale unitaire de degré $n+1$. Donc, pour tout $x \in [a,b]$:
$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K_u(n+1)!.$$
En appliquant à $x = c_u$ et en utilisant l'expression trouvée pour K_u en question 1, on trouve donc :
$$0 = f^{(n+1)}(c_u) - \frac{f(u) - L_{f,\underline{x}}(u)}{\prod_{i=0}^{n}(u - x_i)} \times (n+1)!,$$
ce qui donne l'égalité souhaitée.

4. Soit $x \in [a,b]$. On a :
$$|f(x) - L_{f,\underline{x}}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| = \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1!)}|P_{\underline{x}}(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\|P_{\underline{x}}\|_\infty.$$
Comme l'inégalité est vraie pour tout $x \in [a,b]$, on peut passer à la borne supérieure à gauche et ainsi obtenir :
$$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\|P_{\underline{x}}\|_\infty.$$

2 Fonctions à croissance raisonnable

5. Soit $x \in [a,b]$. On a $P_{\underline{x}}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Notons $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x_k \leq x \leq x_{k+1}$. Pour tout $i < k$, on a : $|x - x_i| = x - x_i \leq (k - i + 1)\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout $j > k+1$, on a

$|x-x_j| = x_j - x \leq (j-k)\dfrac{b-a}{n}$. De plus, le produit $|(x-x_k)(x-x_{k+1})| = (x-x_k)(x_{k+1}-x)$ est maximal (pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$ en le milieu $x = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et il vaut $\left(\dfrac{b-a}{2n}\right)^2$. On en déduit que :

$$|P_{\underline{x}}(x)| \leq \prod_{i=0}^{k-1}(k-i+1)\left(\frac{b-a}{n}\right) \times \left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 \times \prod_{j=k+2}^{n}(j-k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}(k+1)!(n-k)!.$$

Il s'agit donc de montrer que $(k+1)!(n-k)! \leq n!$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$. Or $\dfrac{(k+1)!(n-k)!}{n!} = \dfrac{n+1}{\binom{n+1}{k+1}} \leq 1$ (*en dehors des termes extrêmes valant* 1, *les plus petits coefficients binomiaux* $\dbinom{p}{k}$ *sont obtenus pour* $k=1$ *ou* $k = p-1$).

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$. Comme $\exp$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, $\|\exp^{(n)}\|_\infty = \exp(b)$ est indépendante de n. Fixons $r \geq b-a$. Par croissance comparée, on sait que $\dfrac{n!}{r^n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(b) \leq C\dfrac{n!}{r^n}$. Ce qui conclut.

   C est un majorant de la suite $\dfrac{\exp(b)r^n}{n!}$, *qui tend vers* 0.

7. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{1}{\alpha^2+x^2} = \dfrac{1}{2\alpha i}\left(\dfrac{1}{x-\alpha i} - \dfrac{1}{x+\alpha i}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

   $$f_\alpha^{(n)}(x) = \frac{1}{2\alpha i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+\alpha i)^{n+1}}\right).$$

   On évalue en 0 : $f_\alpha^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\alpha i(\alpha i)^{n+1}}(-1+(-1)^{n+1})$. Après simplifications, on trouve que

   $$f_\alpha^{(n)}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } f_\alpha^{(n)}(0) = \frac{n!}{\alpha^{n+2}}(-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

   b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_\alpha^{(2n)}\|_\infty \geq |f_\alpha^{(2n)}(0)| = \dfrac{(2n)!}{\alpha^{2n+2}}$. Si f_α a une croissance raisonnable sur $[-1,1]$, on trouve donc un $r \geq 2$ et un $C > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{(2n)!}{\alpha^{2n}} \leq C\frac{(2n)!}{r^{2n}}.$$

   Aisni, $2^{2n} = O(r^{2n}) = O(\alpha^{2n})$. Et donc α doit être < 2.

8. Soit $C > 0$, soit $r \geq b-a$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_\infty \leq C\dfrac{n!}{r^n}$. Par les questions 4 et 5, on a alors :

   $$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{C}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \times \frac{n!}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

   Comme $r \geq b-a$, on a :

   $$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{C}{4}\frac{n!}{n^{n+1}} \leq C\frac{n!}{n^n}.$$

9. Par croissance comparée, on sait que le membre de droite dans l'inégalité précédente tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$. Donc si f a une croissance raisonnable sur $[a,b]$, l'écart $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

3 Phénomène de Runge

Dans cette partie, on montre que les fonctions f_α introduites dans la partie précédente ne sont pas bien interpolées par des polynômes, ce que la question 10 suggère.
C'est le *phénomène de Runge*.

On modifie les points d'interpolation utilisés de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$. Les $2n$ points $\pm a_{k,n}$ permettent de définir un polynôme interpolateur $R_{n,\alpha}$: c'est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], R_{n,\alpha}(\pm a_{k,n}) = f_\alpha(\pm a_{k,n}).$$

10. Le polynôme $Q = R_{n,\alpha}(-X)$ est de même degré que $R_{n,\alpha}$ et il vérife $\forall k \in [\![0, n-1]\!], Q(\pm a_{k,n}) = R_{n,\alpha}(\mp a_{k,n}) = f_\alpha(\mp a_{k,n}) = f_\alpha(a_{k,n})$ car f_α est une fonction paire.
Par unicité dans l'interpolation de Lagrange, on a donc égalité $Q = Q(-X)$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = Q(-x)$.
L'égalité $R_{n,\alpha} = R_{n,\alpha}(-X)$ montre que $R_{n,\alpha}$ est une combinaison linéaire de monômes de degré pair ; comme il est de degré $\leq 2n-1$, il est en fait de degré $\leq 2n-2$.

On définit le polynôme $Q_{n,\alpha} = 1 - (X^2 + \alpha^2) R_{n,\alpha}$.

11. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$Q_{n,\alpha}(\pm a_{k,n}) = 1 - (a_{k,n}^2 + \alpha^2) R_{n,\alpha}(\pm a_{k,n}) = 1 - \frac{a_{k,n}^2 + \alpha^2}{a_{k,n}^2 + \alpha^2} = 0.$$

Donc, tous les $\pm a_{k,n}$ sont racines de $Q_{n,\alpha}$. Donc, $\prod_{k=0}^{n-1} (X - a_{k,n}) \times \prod_{k=0}^{n-1} (X + a_{k,n}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - a_{k,n}^2)$ divise Q. Comme $R_{n,\alpha}$ est de degré $\leq 2n-2$, $Q_{n,\alpha}$ est de degré $\leq 2n$; comme on l'a factorisé par un polynôme de degré $2n$, le facteur restant est une constante, qu'on appelle λ.

12. On a $Q_{n,\alpha}(\alpha i) = 1 - ((\alpha i)^2 + \alpha^2) R_{n,\alpha}(\alpha i) = 1$. D'autre part,

$$Q_{n,\alpha}(\alpha i) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} \left((\alpha i)^2 - a_{k,n}^2\right) = (-1)^n \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha^2 + a_{k,n}^2).$$

Donc, $\lambda = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}$.

13. Soit $x \in [-1, 1]$. On a :

$$f_\alpha(x) - R_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2} - \frac{1 - Q_{n,\alpha}(x)}{\alpha^2 + x^2} = \frac{Q_{n,\alpha}(x)}{\alpha^2 + x^2}.$$

On remplace par l'expression trouvée ci-dessous pour $Q_{n,\alpha}$ pour conclure.

14. (a) Comme $\dfrac{1-t^2}{\alpha^2 + t^2}$ est strictement positive sur $[0, 1[$, la fonction h_α y est continue par opérations élémentaires.

De plus, pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2} = 1 + \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2}$. Le dénominateur est croissant avec t, donc $t \mapsto \dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}$ est une fonction décroissante sur $[0,1[$, donc h_α aussi par croissance de ln.

On peut évidemment dériver. Mais dans ce cas, préférer dériver la fonction dans le ln *plutôt que tout h_α, ce qui ne change rien et allège le calcul.*

(b) Pour $t \in]0,1[$, $h_\alpha(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2)$. Donc, en intégrant entre ε et $1-\varepsilon$ et par linéarité :

$$J_{\alpha,\varepsilon} = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln(1-t)dt + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln(1+t)dt - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln(\alpha^2+t^2)dt.$$

On conclut après les changements de variable $u = 1-t$ dans la première intégrale (l'inversion des bornes est compensée par le fait que $dt = -du$) et $u = 1+t$ dans la deuxième.

(c) Notons I_1, I_2 et I_3 les trois intégrales ci-dessus dans l'expression de $J_{\alpha,\varepsilon}$.

- I_1 vaut $\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon}$. Par croissance comparée, ceci tend vers -1 quand $\varepsilon \to 0$.
- I_2 vaut $\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon}$. Ceci tend vers $2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$ quand $\varepsilon \to 0$.
- On calcule I_3 par intégration par parties. On a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[t\ln(\alpha^2+t^2)\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{2t^2}{\alpha^2+t^2} \\ &= \left[t\ln(\alpha^2+t^2)\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - 2(1-2\varepsilon) + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2} \\ &= \left[t\ln(\alpha^2+t^2)\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - 2(1-2\varepsilon) - 2\alpha\left[\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

  Ceci tend vers $\ln(\alpha^2+1) - 2 - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Donc, $J_{\alpha,\varepsilon} = I_1 + I_2 - I_3$ converge vers $2\ln 2 - \ln(\alpha^2+1) - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ quand $\varepsilon \to 0$. C'est donc la valeur de J_α.

(d) Comme arctan a pour limite $\pi/2$ en $+\infty$, on constate par opérations élémentaires que $J_\alpha \to 2\ln 2$ quand $\alpha \to 0$. Comme $2\ln 2$, $J_\alpha > 0$ pour α suffisamment petit, par localisation asymptotique.

(e) On a $J_{\alpha,1/2n} = \displaystyle\int_{a_{0,n}}^{a_{n-1,n}} h_\alpha(t)dt$. Par relation de Chasles :

$$J_{\alpha,1/2n} = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} h_\alpha(t)dt.$$

Par décroissance de h_α et propriété de croissance de l'intégrale ;

$$S_{n,\alpha} - h_\alpha(1/2n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} h_\alpha(a_{k+1,n}) \le J_{\alpha,1/2n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} h_\alpha(a_{k,n}) = S_{n,\alpha} - \frac{1}{n}h_\alpha(1-1/2n).$$

Les deux inégalités ainsi obtenues donnent la minoration et la majoration souhaitée de $S_{n,\alpha}$.

(f) Dans l'encadrement précédent, on a $J_{\alpha,1/2n} \to J_\alpha$ quand $n \to +\infty$. Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{1}{n}h_\alpha(1/2n)$ et $\dfrac{1}{n}h_\alpha(1-1/2n)$ tendent aussi vers 0, pour appliquer le théorème d'encadrement.
Pas de difficultés pour $\dfrac{1}{n}h_\alpha(1/2n)$ car $h_\alpha(1/2n) \to h_\alpha(0)$ par continuité.
Pour $h_\alpha(1-1/2n)$, il faut faire attention que h_α n'est pas définie en 1. Cependant, si $t \in [0,1[$, $h_\alpha(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2)$, donc $h_\alpha(t) \sim \ln(1-t)$ quand t vers 1 (les autres termes tendent vers des constantes). Donc, $\dfrac{1}{n}h_\alpha(1-1/2n) \sim \dfrac{\ln(1/2n)}{n} = -\dfrac{\ln 2n}{n} \to 0$ par croissances comparées.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|f_\alpha(1) - R_{n,\alpha}(1)| = \frac{1}{1+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2} = \frac{1}{1+\alpha^2}\exp(nS_{n,\alpha}).$$

Si α suffisamment petit, $S_{n,\alpha} \to J_\alpha > 0$. Et donc, $|f_\alpha(1) - R_{n,\alpha}(1)| \to +\infty$ aussi.

4 Interpolation en les nœuds de Tchebychev

15. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par l'unicité. Si on a deux tels polynômes T_n et $\tilde{T}_n$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $(T_n - \tilde{T}_n)(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$. Donc $T_n - \tilde{T}_n$ a pour racine tout réel de la forme $\cos\theta$, c'est-à-dire tout réel de $[-1,1]$. Donc $T_n - \tilde{T}_n = 0$, ce qui conclut la preuve d'unicité.
Pour l'existence, on passe en complexe. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)\Big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\cos^{n-2\ell}(\theta)(-1)^\ell\sin^{2\ell}(\theta) \\
\cos(n\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\cos^{n-2\ell}(\theta)(-1)^\ell(1-\cos^2)^\ell(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $T_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Chaque polynôme $X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^\ell$ (*développer le deuxième facteur par binôme de Newton*). Donc T_n est de degré au plus n et le coefficient devant X^n est donné par :

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^\ell \times (-1)^\ell\binom{n}{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}.$$

Or, on sait que, pour $n \geq 1$, la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ pair (ou impair) vaut 2^{n-1} (*résultat montré par calcul ou de façon combinatoire*). Donc, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (sauf pour $n = 0$, où $T_0 = 1$).

b) On a $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta) \\
&\quad + \cos((n+1)\theta)\cos(-\theta)) - \sin((n+1)\theta)\sin(-\theta) \\
&= 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) \\
&= \left(2XT_{n+1}\right)(\cos\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs de $T_{n+2} + T_n$ et $2XT_{n+1}$ sont les mêmes en tout $\cos\theta$, c'est-à-dire sur $[-1, 1]$. Donc $T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\pi/n].$$

Ceci montre que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, les $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont des racines de T_n. Ces racines sont distinctes car cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et que les angles $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont dans $[0, \pi]$. On a ainsi trouvé les n racines de T_n. Donc,

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

16. Soit $x \in [-1, 1]$. On peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Alors $T_n(x) = \cos(n\theta)$ et donc $|T_n(x)| \leq 1$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \leq 1$.

Avec les mêmes notations, on aura

$$|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff n\theta \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi/n].$$

Ainsi, $T_n(x) = \pm 1$ ssi x est égal à l'un des $y_k = \cos((n-k)\pi/n)$, où $k \in [\![0, n]\!]$. *On utilise ces notations pour se conformer à l'énoncé.*

Par décroissance de cos sur $[0, \pi]$, on a alors :

$$-1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1.$$

Enfin, $T_n(y_k) = \cos\left(n \times (n-k)\pi/n\right) = \cos\left((n-k)\pi\right) = (-1)^{n-k}$.

17. On suppose par l'absurde que $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$. On a donc, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Posons $Q = P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$. Comme P et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ sont unitaires de degré n, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $Q(y_k) = P(y_k) - \frac{T_n(y_k)}{2^{n-1}} = P(y_k) + \frac{(-1)^{n-k+1}}{2^{n-1}}$. Si $n - k + 1$ est pair, on en déduit que $Q(y_k) > 0$ (car $P(y_k) > \frac{-1}{2^{n-1}}$). De même, si $n - k + 1$ est impair, on a $Q(y_k) < 0$.

Ainsi, Q prend des valeurs alternativement strictement négatives et strictement positives en les y_k. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, Q a une racine sur chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$, pour $k \in [\![0, n]\!]$. Comme Q est de degré $\leq n-1$ et qu'il a au moins n racines, Q est nul. Donc $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, ce qui contredit l'hypothèse $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$.

On conclut finalement que $\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ (*et la preuve montre que le seul polynôme unitaire de degré n réalisant l'égalité est* $\frac{T_n}{2^{n-1}}$).