

## Semaine 16 – Algèbre linéaire en dimension finie

### 1 Algèbre linéaire générale

Reprise du programme précédent

### 2 Espace vectoriel de dimension finie

- Espace vectoriel de dimension finie
- Complétion d'une famille libre en une base, en lui adjoignant des vecteurs d'une famille génératrice
- Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète
- Existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie
- Une famille d'au moins  $n + 1$  vecteurs dans un espace engendré par  $n$  vecteurs est liée.
- Toutes les bases ont même cardinal : la dimension de l'espace vectoriel

### 3 Sous-espaces en dimension finie

- Un sous-espace d'un espace de dimension finie  $n$  est de dimension finie  $p \leq n$ . Cas d'égalité.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Dimension d'un produit d'espaces vectoriels, d'une somme directe
- Formule de Grassmann et conséquences

### 4 Applications linéaires en dimension finie

- Théorème du rang. Conséquences pour les applications linéaires entre espaces de dimension finie.
- Introduction à la dualité.
  - Une intersection de  $p$  hyperplans dans  $E$  de dimension  $n$  a pour dimension au moins  $n - p$
  - Tout sous-espace de dimension  $n - p$  peut être écrit comme intersection de  $p$  hyperplans.
  - Plus précisément (HP) : si  $\ell_1, \dots, \ell_p$  sont  $p$  formes linéaires,  $\dim \left( \bigcap \text{Ker } \ell_i \right) = n - \text{rg}(\ell_1, \dots, \ell_p)$

- Passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne pour un ssev de  $\mathbb{K}^n$ , et vice-versa (*mais les aspects les plus techniques sont reportés au chapitre suivant*)

## 5 Exemples de questions de cours

- Théorème du rang (avec d'abord le théorème d'isomorphisme entre un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ )
- Formule de Grassmann
- Dimension minimale d'une intersection de  $p$  hyperplans ; un ssev de dimension  $n - p$  peut être écrit comme intersection de  $p$  hyperplans
- Calculs explicites de rang, dimension, noyau, image... dans des espaces de petite dimension