

# Calcul matriciel et systèmes linéaires

Jeremy Daniel

La Matrice est universelle. Elle est  
omniprésente. Elle est avec nous ici,  
en ce moment même.

---

*Matrix*

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

## 1 L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

### 1.1 Présentation

DÉFINITION 1.1 (Matrice de taille  $n \times p$ )

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Une *matrice* de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  indexée par  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ .

REMARQUE 1.2

Une matrice  $A$  de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  s'écrit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

On y pense comme un tableau de nombres et on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le premier indice est donc le numéro de la ligne, le deuxième celui de la colonne.

NOTATION 1.3

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $n = p$ , on abrège  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$  en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et on parle de *matrices carrées de taille  $n$* .

DÉFINITION 1.4 (Loi + sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ )

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices de même taille  $n \times p$ , on définit la somme  $A + B$  en effectuant la somme coefficients par coefficients :  $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

DÉFINITION 1.5 (Multiplication externe)

Si  $A$  est une matrice et si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $\lambda A$  la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient par  $\lambda$  :  $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

REMARQUE 1.6

Muni des lois  $+$  et de la multiplication externe,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, isomorphe à  $\mathbb{K}^{np}$  en associant à une matrice  $A$  le  $np$ -uplet  $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, \dots, a_{n,p})$ .

DÉFINITION 1.7 (Symbole de Kronecker)

Si  $i, j$  sont deux entiers naturels, on note  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

DÉFINITION 1.8 (Matrices élémentaires)

Soient  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On note  $E_{k,l}$  la matrice de taille  $n \times p$ , définie par

$$(E_{k,l})_{i,j} = \delta_{i,k} \delta_{j,l}.$$

REMARQUE 1.9

C'est donc la matrice de taille  $n \times p$ , avec un 1 en position  $(k, l)$  et des 0 partout ailleurs. Comme les entiers  $n, p$  ne figurent pas dans la notation  $E_{k,l}$ , on précisera la taille de la matrice élémentaire si elle n'est pas claire dans le contexte.

**PROPOSITION 1.10**

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times p$ . Alors,  $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$ .

REMARQUE 1.11

L'écriture de  $A$  comme combinaison linéaire des  $E_{i,j}$  est unique ; ainsi la famille des  $E_{i,j}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On l'appelle la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

## 1.2 Produit matriciel

DÉFINITION 1.12 (Produit matriciel)

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

Le produit  $AB = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, c_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k}.$$

**REMARQUE 1.13**

On retiendra que le coefficient de coordonnées  $(i, k)$  du produit  $AB$  s'obtient en prenant la  $i$ -ème ligne de  $A$  et la  $k$ -ème colonne de  $B$  et en faisant la somme des produits des coefficients dans cette ligne et cette colonne.

**ATTENTION !**

Plusieurs mises en garde s'imposent :

- Faire le produit  $AB$  de deux matrices n'a de sens que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .
- Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , les produits  $AB$  et  $BA$  ont un sens mais ils ne vivent pas dans le même espace. En effet,  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- Même quand  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées de même taille  $n$ , on n'a pas en général  $AB = BA$ .

**EXERCICE 1.14**

On considère les trois matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  ;  $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  ;  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Quels sont les produits bien définis entre ces matrices et que valent-ils ?

**LEMME 1.15** (Produit de matrices élémentaires)

Soient  $n, p$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soient  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $l \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . On considère  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Alors, dans  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

**PROPOSITION 1.16** (Associativité du produit)

Soient  $n, p, q$  et  $r$  des entiers naturels non nuls. On considère  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ . On a l'égalité  $(AB)C = A(BC)$ .

**PROPOSITION 1.17** (Bilinéarité du produit matriciel)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Les applications

$$\phi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_B : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto MB \end{cases}$$

sont linéaires.

**DÉFINITION 1.18** (Matrice  $I_n$ )

On définit la matrice identité  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  comme la matrice avec des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

**COROLLAIRE 1.19** ( $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un anneau)

Muni des lois  $+$  et  $\times$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un anneau, d'élément neutre pour le produit  $I_n$ .

#### REMARQUE 1.20

Cet anneau est non commutatif si  $n \geq 2$ . De plus, il ne satisfait pas la règle du produit nul et possède des éléments nilpotents (élément non nul dont une puissance est nulle).

#### EXERCICE 1.21

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , exhiber une matrice  $A$  non nulle telle que  $A^2$  est nulle. Exhiber aussi deux matrices  $B$  et  $C$  telles que  $BC$  est nulle mais pas  $CB$ .

#### REMARQUE 1.22

On peut donc appliquer dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  toutes les règles de calcul valables dans un anneau quelconque. En particulier, la formule du binôme de Newton est valable pour calculer une puissance de la somme de deux matrices  $A$  et  $B$  telles que  $AB = BA$ .

#### DÉFINITION 1.23 ( $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ )

On note  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  le groupe des inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### 1.3 Transposition et sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

#### DÉFINITION 1.24 (Transposée d'une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . La transposée de  $A$ , notée  $A^T$  est la matrice  $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  dont le coefficient en position  $(j, i)$  – pour tout  $(j, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$  – est  $a_{i,j}$ .

#### PROPOSITION 1.25 (La transposition est un isomorphisme d'espaces vectoriels)

*L'application  $A \mapsto A^T$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  vers  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

#### DÉFINITION 1.26 (Matrices symétriques, anti-symétriques)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est symétrique si  $A = A^T$ , anti-symétrique si  $A = -A^T$ .

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques/anti-symétriques de taille  $n$ .

#### PROPOSITION 1.27

On note  $\Phi : A \mapsto A^T$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

*C'est une symétrie. De plus  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\Phi - \text{Id})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\Phi + \text{Id})$ .*

#### COROLLAIRE 1.28

*Si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ , toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

#### PROPOSITION 1.29 (Transposée d'un produit)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Alors, dans  $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ ,  $(AB)^T = B^T A^T$ .

#### PROPOSITION 1.30 (Inverse et transposée)

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible alors  $A^T$  aussi. Dans ce cas,  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

DÉFINITION 1.31 (Matrices diagonales)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonale si ses coefficients hors de la diagonale sont nuls :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \implies a_{i,j} = 0.$$

NOTATION 1.32

On pourra noter  $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$  la matrice diagonale dont le coefficient en position  $(i, i)$  est  $d_i$ .

DÉFINITION 1.33 (Matrices scalaires)

Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont identiques.

REMARQUE 1.34

Une telle matrice s'écrit donc  $\lambda I_n$ , pour un  $\lambda \in \mathbb{K}$ . La multiplication par  $\lambda I_n$  revient à faire une multiplication par  $\lambda$  :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A$ .

DÉFINITION 1.35 (Matrices triangulaires supérieures)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire supérieure si ses coefficients strictement sous diagonale sont nuls :  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i > j \implies a_{i,j} = 0$ .

REMARQUE 1.36

Elle est triangulaire supérieure stricte si de plus les coefficients diagonaux sont nuls.

REMARQUE 1.37

On peut de même définir les matrices triangulaires inférieures (strictes).

NOTATION 1.38

On note  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices diagonales et triangulaires supérieures de taille  $n$ .

**PROPOSITION 1.39** ( $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  sont des sous-anneaux)

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  sont des sous-anneaux de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

REMARQUE 1.40

Le calcul montre que, dans un produit de deux matrices diagonales ou triangulaires supérieures, les coefficients diagonaux se calculent terme à terme.

**PROPOSITION 1.41** (Les matrices triangulaires supérieures strictes sont nilpotentes)

Si  $T$  est une matrice triangulaire supérieure stricte, alors  $T^n = 0$ .

## 2 Matrices et applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

### 2.1 Correspondance

REMARQUE 2.1

On peut identifier les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , en associant à  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

la matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Cette identification sera souvent implicite dans

la suite.

DÉFINITION 2.2 (Application linéaire associée à une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . L'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ , correspondant au produit matriciel  $X \mapsto AX$ , de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

REMARQUE 2.3

Si  $A = (a_{i,j})$ ,  $f$  est donc définie par  $f(x_1, \dots, x_p) = \left( \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j \right)_{1 \leq i \leq n}$ .

Si pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $e_i$  le  $i$ -ème élément de la base canonique de  $\mathbb{K}^p$  et  $C_i$  la  $i$ -ème colonne de  $A$  (vue comme vecteur de  $\mathbb{K}^n$ , on a pour tout  $i : A(e_i) = C_i$ ).

**PROPOSITION 2.4** (Isomorphisme  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ )

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on note  $f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  l'application linéaire associée. Alors,

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A & \mapsto f_A \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

EXERCICE 2.5

On considère  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$\phi(x, y) = (2x + 3y, 5x - 7y, 9x + 2y).$$

Écrire la matrice  $M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$  associée à  $\phi$ .

**PROPOSITION 2.6** (Compatibilité évaluation/produit)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ; notons  $f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  et  $x \in \mathbb{K}^p$  l'application linéaire et le vecteur correspondant. Alors,  $Y = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  correspond au vecteur  $y = f_A(x)$ .

**PROPOSITION 2.7** (Compatibilité composition/produit)

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , on a avec les notations précédentes :

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \text{ dans } \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n).$$

**COROLLAIRE 2.8** (Cas des matrices carrées)

*L'application  $\Phi$  précédente de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux. Elle induit un isomorphisme de groupes  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ .*

## 2.2 Systèmes linéaires $AX = Y$

**DÉFINITION 2.9** (Équation linéaire à  $p$  inconnues)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Une équation linéaire à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$  est une équation de la forme  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = y$ , où  $a_1, \dots, a_n, y \in \mathbb{K}$ .

**REMARQUE 2.10**

C'est donc une équation de la forme  $\ell(x) = y$ , où  $\ell \in (\mathbb{K}^p)^*$  est une forme linéaire,  $x \in \mathbb{K}^p$  est l'inconnue et  $y \in \mathbb{K}$ .

**DÉFINITION 2.11** (Systèmes linéaires de  $n$  équations à  $p$  inconnues)

Un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$  est la donnée de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p$

**REMARQUE 2.12**

On l'écrit sous la forme 
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}.$$

**DÉFINITION 2.13** (Coefficients, second membre)

Les  $a_{i,j}$  sont les coefficients du système. Les  $y_i$  constituent le second membre de l'équation.

**DÉFINITION 2.14** (Système linéaire homogène)

Un système linéaire est homogène si le second membre est nul. Étant donné un système linéaire quelconque, son système linéaire homogène associé est le système obtenu en gardant les mêmes coefficients mais en annulant le second membre.

**DÉFINITION 2.15** (Système compatible)

Un système est compatible s'il admet au moins une solution. Il est incompatible sinon.

**REMARQUE 2.16**

Tout système homogène est compatible : une solution est obtenue en prenant tous les  $x_j$  nuls.

**PROPOSITION 2.17** (Matrice du système)

On note  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  la matrice des coefficients et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  la matrice colonne

associée au second membre. Si  $x = (x_1, \dots, x_p)$  est un élément de  $\mathbb{K}^p$ , on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

sa matrice colonne associée.

Alors,  $x$  est solution du système linéaire ssi l'équation matricielle  $AX = Y$  est satisfaite.

**REMARQUE 2.18**

En pratique, on ne distinguera pas les deux modes d'écriture et on dira que l'équation  $AX = Y$  est un système linéaire.

**REMARQUE 2.19**

En notant  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  associée à  $A$ , le système précédent est encore équivalent à l'équation  $f(x) = y$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{K}^p$ .

En particulier, l'ensemble des solutions du système est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine dirigé par  $\text{Ker } f$ , ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

## 2.3 Noyau, image et rang

**DÉFINITION 2.20** (Noyau, image et rang d'une matrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- Le noyau de  $A$ , noté  $\text{Ker } A$ , est le noyau de l'application linéaire associée à  $A$ .  
C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$ .
- L'image de  $A$ , noté  $\text{Im } A$ , est l'image de l'application linéaire associée à  $A$ .  
C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .
- Le rang de  $A$ , noté  $\text{rg } A$ , est le rang de l'application linéaire associée.

**REMARQUES 2.21**

- Calculer  $\text{Ker } A$  revient à résoudre le système linéaire  $AX = 0$ .
- Calculer  $\text{Im } A$  revient à déterminer pour quels  $Y \in \mathbb{K}^n$  le système  $AX = Y$  est compatible.
- Pour calculer le rang de  $A$ , on peut directement calculer la dimension de  $\text{Im } A$ , mais on peut aussi calculer la dimension de  $\text{Ker } A$  et utiliser la formule du rang.

## 2.4 Systèmes de Cramer

**DÉFINITION 2.22** (Système de Cramer)

Un système de Cramer est un système linéaire ayant autant d'équations que d'inconnues et dont la matrice des coefficients est inversible.

**THÉORÈME 2.23**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $A$  est inversible ;
2.  $A$  est inversible à droite : il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$  ;
3.  $A$  est inversible à gauche : il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $BA = I_n$  ;
4.  $\text{Im } A = \mathbb{K}^n$  ;
5.  $\text{Ker } A = \{0\}$  ;
6. Pour tout  $Y \in \mathbb{K}^n$ , le système  $AX = Y$  a une unique solution.

**REMARQUE 2.24**

C'est encore équivalent à demander qu'il existe  $Y \in \mathbb{K}^n$  tel que le système  $AX = Y$  a une unique solution.

**REMARQUE 2.25**

Le calcul pratique de l'inverse d'une matrice sera explicité dans la section suivante.

**Cas des matrices  $2 \times 2$ .****DÉFINITION 2.26**

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On définit son déterminant  $\det M$  par  $\det M = ad - bc$ .

**THÉORÈME 2.27**

La matrice  $M$  est inversible ssi  $\det M \neq 0$ . Dans ce cas, son inverse est

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Cas des matrices diagonales et triangulaires.****PROPOSITION 2.28** (Inverse d'une matrice diagonale)

Soit  $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$  une matrice diagonale.  $D$  est inversible ssi  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \neq 0$ .

Dans ce cas,  $D^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$ .

**THÉORÈME 2.29** (Critère d'inversibilité pour une matrice triangulaire)

Une matrice triangulaire  $T$  supérieure est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas,  $T^{-1}$  est aussi une matrice triangulaire supérieure.

## 3 Pivot de Gauss

### 3.1 Matrices d'opérations élémentaires

DÉFINITION 3.1 (Matrices d'opérations élémentaires)

On fixe  $n$  un entier naturel non nul. Soient  $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ . On considère les matrices suivantes, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
- $M_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$
- $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$

On les appelle les matrices d'opérations élémentaires.

EXEMPLE 3.2

Pour  $n = 2$ , on a :  $P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $T_{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ .

REMARQUE 3.3

Les notations ne sont pas standard.  $P$  est pour permutation ;  $M$  pour multiplication et  $T$  pour transvection.

**PROPOSITION 3.4** (Opérations élémentaires sur les lignes)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Multiplier  $A$  à gauche par une matrice d'opération élémentaire donne une matrice  $\tilde{A}$ , obtenue en agissant sur les lignes de  $A$ . Plus précisément :

- $P_{i,j}A$  est la matrice obtenue en échangeant les lignes  $i$  et  $j$  de  $A$  ;
- $M_i(\lambda)A$  est la matrice obtenue en multipliant la ligne  $i$  de  $A$  par  $\lambda$  ;
- $T_{i,j}(\lambda)A$  est la matrice obtenue en ajoutant à la ligne  $i$  de  $A$ ,  $\lambda$  fois la ligne  $j$  de  $A$ .

REMARQUE 3.5

On peut aussi agir sur les colonnes de  $A$  en multipliant à droite. Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

- $AP_{i,j}$  est la matrice obtenue en échangeant les colonnes  $C_i$  et  $C_j$  de  $A$  ;
- $AM_i(\lambda)$  est la matrice obtenue en multipliant la  $i$ -ème colonne de  $A$  par  $\lambda$  ;
- $AT_{i,j}(\lambda)$  est la matrice obtenue en ajoutant  $\lambda$  fois la  $i$ -ème colonne de  $A$ , à la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

**PROPOSITION 3.6** (Inversibilité des matrices d'opérations élémentaires)

Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles.

**COROLLAIRE 3.7**

Soit  $AX = Y$  un système linéaire de taille  $n \times p$ . Soit  $P$  une matrice d'opération élémentaire, de taille  $n$ . Alors,  $AX = Y \iff (PA)X = PY$ .

REMARQUE 3.8

Ceci est une traduction matricielle du fait que les solutions d'un système linéaire sont

inchangées quand on effectue une opération élémentaire du type précédent sur les lignes du système.

## 3.2 Algorithme du pivot de Gauss

DÉFINITION 3.9 (Matrice échelonnée en lignes)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On note  $L_1, \dots, L_n$  ses lignes. On dit que  $A$  est échelonnée en lignes si elle vérifie les conditions suivantes :

- Si une ligne  $L_i$  est nulle, les lignes  $L_j$  pour  $j \geq i$  sont nulles ;
- Si une ligne  $L_i$  est non nulle et si son premier coefficient non nul est en position  $k$ , alors : ou bien  $L_{i+1}$  est nulle, ou bien son premier coefficient non nul est en position  $\ell$ , avec  $\ell > k$ .

REMARQUE 3.10

Visuellement, en parcourant les lignes de la matrice de haut en bas, le nombre de zéros en début de ligne croît strictement jusqu'à ce que la ligne entière soit nulle.

DÉFINITION 3.11 (Pivot dans une ligne non nulle)

Si une matrice  $A$  est échelonnée en ligne et que sa ligne  $L_i$  est non nulle, on appelle *pivot* de la ligne  $L_i$  son premier coefficient non nul.

EXEMPLE 3.12

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est échelonnée en lignes. Les pivots sont 1, 5 et 7.

MÉTHODE 3.13 (Algorithme du pivot de Gauss)

L'objectif est de transformer un système linéaire en un système échelonné équivalent, qu'on peut alors résoudre. On part d'un système linéaire  $(\mathcal{S})$  à  $n$  lignes et  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p$  :

- Si la première inconnue  $x_1$  n'apparaît pas dans le système, on passe à l'étape suivante.
- Si  $x_1$  apparaît sur une ligne, on peut le faire apparaître sur la première ligne, quitte à faire un échange de deux lignes.
- Si  $x_1$  apparaît sur la première ligne, on peut ajouter à chacune des autres lignes  $L_i$ ,  $i \geq 2$ , un multiple de la ligne  $L_1$ , afin de faire disparaître  $x_1$  des lignes  $L_i$ , pour  $i \geq 2$ .

Après cette première étape, l'inconnue  $x_1$  apparaît dans le système seulement sur la première ligne (ou pas du tout). On recommence cette procédure avec le sous-système de  $n-1$  équations (lignes  $L_2, \dots, L_n$ ) et  $p-1$  inconnues  $x_2, \dots, x_p$ . Ainsi de suite... jusqu'à obtenir un système échelonné. Comme chaque opération élémentaire transforme un système en système équivalent, le système échelonné est équivalent au système initial.

### REMARQUES 3.14

- L'opération élémentaire de multiplication n'est pas nécessaire pour cet algorithme. Cependant, elle permet parfois de limiter les erreurs de calcul (notamment pour manipuler des coefficients entiers plutôt que des fractions).
- De même, pour limiter les erreurs, on peut avoir intérêt à faire une permutation de deux lignes pour avoir le coefficient le plus simple possible devant la variable qu'on va éliminer des autres lignes (le mieux, c'est d'avoir 1 ou  $-1$  devant cette variable).

### THÉORÈME 3.15 (Pivot de Gauss - Toute matrice est échelonnée en lignes)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Il existe  $A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  échelonnée en lignes, telle que  $A'$  s'obtienne à partir de  $A$  par des opérations élémentaires successives sur les lignes.

### REMARQUE 3.16

La résolution d'un système linéaire échelonné se fait *de proche en proche* à partir du bas. Les variables correspondant à des colonnes sans pivot sont libres : elles peuvent prendre une valeur quelconque ; les autres variables sont exprimées en fonction des variables libres.

### EXERCICE 3.17

$$\text{Résoudre, pour } (x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : \begin{cases} x + y - 2z + t = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + 2y - t = 1 \\ -y - 2z + 3t = 4 \end{cases}$$

### EXERCICE 3.18

$$\text{Soit } m \in \mathbb{R}. \text{ Résoudre } (\mathcal{S}_m) : \begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = m \end{cases}$$

## 3.3 Calculs pratiques

**Noyau d'une matrice.** On cherche le noyau de  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On écrit le système linéaire  $AX = 0$ , qu'on résout par pivot de Gauss.

D'un point de vue plus abstrait, notons  $A'$  une matrice échelonnée en lignes équivalentes à  $A$  ;  $L_1, \dots, L_k$  les lignes non nulles de  $A'$  et  $\ell_1, \dots, \ell_k$  les formes linéaires sur  $\mathbb{K}^p$  associées. Alors,

- $\text{Ker } A = \text{Ker } A' = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } \ell_i$  ;
- $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  est une famille libre de  $(\mathbb{K}^p)^*$  ;
- $\text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)$  est l'ensemble des formes linéaires nulles sur  $\text{Ker } A$ .

### EXERCICE 3.19

$$\text{Calcul du noyau de } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Image d'une matrice.** On cherche l'image de  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Si  $C_1, \dots, C_p$  sont les colonnes de  $A$ , alors  $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .

- Si on cherche une base de  $\text{Im } A$ , on peut échelonner  $A$  en colonnes – définition analogue. Alors, les colonnes non nulles forment une base. En effet, on ne change pas l'image d'une matrice en la multipliant à droite par une matrice inversible (en l'occurrence un produit de matrices d'opérations élémentaires).
- Si on souhaite un système d'équations définissant  $\text{Im } A$ , on écrit le système  $AX = Y$  pour un second membre  $Y$  variable. On échelonne en lignes ce système, jusqu'à faire apparaître des conditions de compatibilité : nouveau système homogène d'inconnue  $Y$ , dont les solutions sont exactement les éléments de  $\text{Im } A$ .

EXERCICE 3.20

Calcul de l'image de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Rang d'une matrice.** On échelonne la matrice en colonnes/lignes ; le rang est le nombre de colonnes/lignes non nulles.

**Inverse d'une matrice.** On cherche à déterminer si une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse. On considère un second membre  $Y$  quelconque et on résout le système  $AX = Y$ . Quand  $A$  a été échelonnée en lignes, elle est inversible ssi il n'y a pas de lignes nulles. Dans ce cas, on continue la résolution ; formellement on peut réécrire la présentation des solutions sous la forme

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = Y \iff X = A^{-1}Y.$$

Ainsi,  $A^{-1}$  est la matrice des coefficients permettant d'exprimer la solution  $X$  en fonction du second membre  $Y$ .

On peut reformuler matriciellement cette méthode. On dispose côte à côte la matrice  $A$  et la matrice  $I_n$ . On applique les mêmes opérations sur les lignes de  $A$  et de  $I_n$  jusqu'à échelonnement. Puis on continue les opérations sur les lignes, jusqu'à transformer  $A$  en la matrice  $I_n$  – sorte de deuxième pivot de Gauss, à l'envers. Quand  $A$  a été transformée en  $I_n$ ,  $I_n$  a été transformée en  $A^{-1}$ . C'est l'algorithme de Gauss-Jordan.

**Représentation paramétrique/représentation cartésienne.** Si un sous-espace  $F$  de  $\mathbb{K}^n$  est donné par équations, on peut en trouver une base – donc une représentation paramétrique – en résolvant le système linéaire.

Réciproquement, étant donnée une représentation paramétrique de  $F$  – *via* une famille génératrice de  $F$  – on peut trouver un système d'équations de  $F$  en procédant de façon analogue à la méthode proposée pour le calcul de l'image d'une matrice.