

Matrices et systèmes linéaires

1 Pratique du pivot de Gauss

EXERCICE 1. ●○○ *Systèmes linéaires*

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$1. \begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x+y=5 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+2y-z+3t=2 \\ -2x-4y+2z+t=3 \\ 3x+6y-3z+2t=1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=1 \\ 2u+3v=0 \end{cases}$$

EXERCICE 2. ♣ – ●○○ *Systèmes linéaires à paramètres*Soit a, b, m des réels. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

$$1. \begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

EXERCICE 3. ♣ – ●○○ *Inversion de matrices*

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4. ♣ – ●●○ *Inversion de matrices à paramètres*Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5. ●○○ Conditions sur le graphe d'une fonction

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ae^x + bx + c$.

Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on que le graphe de f contient le point $(0, 1)$, que sa tangente en ce point contient également le point $(2, 3)$ et que le graphe admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 3$?

EXERCICE 6. ♣ – ●○○ Décomposition en éléments simples

Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (s'ils existent) tels que l'on ait les identités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_3, \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1};$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}, \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x - 3};$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2};$
4. $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}.$

EXERCICE 7. ◇ – ●○○ Systèmes non linéaires

Résoudre les systèmes suivants (x, y et z sont réels).

1. $\begin{cases} xy = 1 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$

2 Calcul matriciel

EXERCICE 8. ○○○ Produit de matrices

Effectuer tous les produits possibles de deux matrices (non nécessairement distinctes) choisies parmi les quatre suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 9. ○○○ Calcul du noyau et de l'image

Donner une base du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 10. ○○○ Représentation de projecteurs et symétries

1. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire les matrices dans la base canonique de
 - (a) la projection sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, -1)$;

(b) la symétrie par rapport à la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$, parallèlement au plan d'équation $x + 3y - 5z = 0$.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est un projecteur, dont on déterminera le noyau et

l'image. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à P est diagonale.

3. Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est une symétrie, dont on précisera les sous-

espaces caractéristiques. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à S est diagonale.

EXERCICE 11. ●○○ Matrice J_n

On note J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer J_n^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. J_n est-elle inversible ?

EXERCICE 12. ♣/◇ – ●○○ Puissances de matrices

Soient $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la puissance n -ième des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 13. ●○○ Un calcul d'inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $-A^3 + A^2 + 5A - I_3$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

EXERCICE 14. ●○○ Produit de matrices symétriques

Montrer que deux matrices symétriques commutent ssi leur produit est une matrice symétrique.

EXERCICE 15. ●●○○ Un calcul de commutant

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

EXERCICE 16. ♣ – ●●○ *Triangulaire supérieure commutant avec sa transposée*

Que dire d'une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec sa transposée ?

EXERCICE 17. ♣ – ●●○ *Matrice de racines de l'unité*

Soit $n \geq 2$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\omega^{(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A .

1. Calculer $A\bar{A}$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

3 Matrices - théorie

EXERCICE 18. ●○○ *Mini-maxi et Maxi-mini*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice à coefficients réels. Montrer que

$$\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq n} a_{i,j}.$$

EXERCICE 19. ●○○ *Une construction de $\mathbb{C}$*

On définit $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que C est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que C est un corps.
3. Montrer que C est isomorphe au corps des nombres complexes.

EXERCICE 20. ●○○ *Commutant de matrices diagonales*

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D .

2. En déduire le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA.$$

EXERCICE 21. ●○○ *Matrices nilpotentes*

Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

1. A quelle condition une matrice triangulaire supérieure est-elle nilpotente ?
2. On suppose $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.

EXERCICE 22. ♣ – ●●○ *Alternative pour les systèmes linéaires*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer qu'on a l'alternative suivante :

1. $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : AX = B$;
2. $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : Y^T A = 0$ et $Y^T B \neq 0$.

EXERCICE 23. ♣/◇ – ●●○ *Matrices équivalentes*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes (en lignes-colonnes) si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes **et** sur les colonnes.

1. Démontrer que A et B sont équivalentes ssi il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.
2. Démontrer que A est équivalente à une matrice de la forme $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & (0) \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

avec r nombres 1 sur la diagonale.

3. Démontrer que si $n = p$ et A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.

EXERCICE 24. ♣/◇ – ●●●○ *Matrices à diagonale dominante*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Indications

Exercice 7. On distinguera soigneusement selon les signes de x , y et z .

Exercice 12. En pratique, deviner la formule puis la montrer par récurrence. Pour 2., on peut être plus malin.

Exercice 23. Une opération élémentaire sur les lignes/colonnes correspond à multiplier à gauche/à droite par une matrice inversible. Par ailleurs, l'algorithme du pivot de Gauss montre que toute matrice inversible est produit de matrices d'opérations élémentaires.

Exercice 24. Considérer un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$. Si par l'absurde X était non nul, on pourrait considérer un indice i tel que $|x_i|$ est maximal.