

Analyse asymptotique

1 Relations de comparaison

EXERCICE 1. ♣ – ○○○ *Ordres de grandeur*

Classer par ordre de négligeabilité les suites ou fonctions suivantes :

- a) $n^2, n \ln n, \frac{e^n}{n^2}, n^{-3}, 1, \frac{\ln n}{n^4}, n^{\ln n}, n$;
- b) $x^2, \sqrt{x}, x \ln x, x(\ln x)^2, e^{3x}, 5^x, \frac{2}{x^4}, 4x^3$, au voisinage de 0 ;
- c) $x^2, \sqrt{x}, x \ln x, x(\ln x)^2, e^{3x}, 5^x, \frac{2}{x^4}, 4x^3$, au voisinage de $+\infty$

EXERCICE 2. ○○○ *Manipulation de o*

Vrai/Faux :

- a) $x = o(\sqrt{x})$ au voisinage de 0.
- b) $3x^2 + 2x = O(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.
- c) $x^2 = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.
- d) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de 0.
- e) $(x-1) = o((x-1)^2)$ au voisinage de 1.
- f) $\sin x = x + o(x)$ au voisinage de 0.
- g) $o(f) + o(f) = o(f)$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- h) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de 0.
- i) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$ au voisinage de 0.
- j) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 3. ●○○ *Équivalents de suites*

Déterminer un équivalent et la limite des suites suivantes :

- a) $t_n = \frac{5n^5 - 4n^4 + 3n^3}{2n^2 + 3n^5}$
- b) $u_n = (n + 3 \ln n) e^{-(n+1)}$
- c) $v_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
- d) $w_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}$

$$\text{e) } x_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln n - 2n^2}$$

$$\text{g) } z_n = \frac{\sin(1/n)}{\exp(5/n) - 1}$$

$$\text{f) } y_n = \frac{n^3 \ln(1 + 1/n)}{n^2 \sqrt{1 + 3n}}$$

EXERCICE 4. ●○○ Équivalents de fonctions

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f_1 : x \mapsto \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln(x)} \text{ en } +\infty$$

$$\text{d) } f_4 : x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1 - \sqrt{1 + 2x^3}} \text{ en } +\infty$$

$$\text{b) } f_2 : x \mapsto \frac{x \ln(x) - x}{x + \cos(x)} \text{ en } +\infty$$

$$\text{e) } f_5 : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{1 - \sqrt{1 + 2x^3}} \text{ en } 0$$

$$\text{c) } f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \text{ en } +\infty$$

$$\text{f) } f_6 : x \mapsto \frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3} \text{ en } 3.$$

EXERCICE 5. ♣/◇ – ●○○ Un équivalent

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels. On suppose que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Déterminer la limite et un équivalent de (u_n) .

2 Développement limités

EXERCICE 6. ●○○ Développement limité d'une fonction paire

Soit f une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ en 0.

A-t-on nécessairement $f(x) = 1 + x^2 + o(x^3)$ en 0 ?

EXERCICE 7. ♣ – ●●○○ Calcul pratique de développements limités

Calculer les développements limités suivants :

$$\text{a) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \frac{1}{1-x} - e^x$$

$$\text{i) } \text{DL}_3(1) \text{ de } \cos(\ln x)$$

$$\text{b) } \text{DL}_5(0) \text{ de } \sin(x) \cos(2x)$$

$$\text{j) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \ln(1 + e^x)$$

$$\text{c) } \text{DL}_3(0) \text{ de } (x^3 + 1)\sqrt{1-x}$$

$$\text{k) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \ln(2 + \sin x)$$

$$\text{d) } \text{DL}_4(0) \text{ de } \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$$

$$\text{l) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \exp(\sqrt{1+x})$$

$$\text{e) } \text{DL}_4(0) \text{ de } \ln(1+x)^2$$

$$\text{m) } \text{DL}_2(0) \text{ de } \ln(1 + \sqrt{1+x})$$

$$\text{f) } \text{DL}_3(\pi/4) \text{ de } \sin(x)$$

$$\text{n) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \ln(3e^x + e^{-x})$$

$$\text{g) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right)$$

$$\text{o) } \text{DL}_2(0) \text{ de } (1+x)^{1/x}$$

$$\text{h) } \text{DL}_3(0) \text{ de } \ln(1 + \sin(x))$$

$$\text{p) } \text{DL}_4(0) \text{ de } \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

q) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

v) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

r) $DL_2(0)$ de $\frac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x}$

w) $DL_{100}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$

s) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

x) $DL_3(\pi/6)$ de $\exp(\sin x)$

t) $DL_6(0)$ de $(\cos x)^{\sin x}$

y) $DL_3(0)$ de $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$

u) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$

z) $DL_4(0)$ de $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$

EXERCICE 8. ●●○ *Primitivation des développements limités*

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}\right)$. Calculer f' et en déduire le $DL_4(0)$ de f .

EXERCICE 9. ♣ – ●●○ *Détermination d'équivalents*

Déterminer un équivalent des suites et fonctions suivantes :

a) $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

e) $f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ en 0

b) $v_n = \sqrt{\ln(n^2+1)} - \sqrt{\ln(n^2+1/2)}$

f) $f_2 : x \mapsto (e+x)^e - e^{e+x}$ en 0

c) $w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$

g) $f_3 : x \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1$ en $+\infty$

d) $x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+(-1)^n})$

h) $f_4 : x \mapsto \cos(\cos x) - \sin x$ en $\pi/2$

EXERCICE 10. ●●○ *Détermination de limites*

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \left(\tan \frac{x}{2}\right)^{\tan x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right)^{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x^{1/x}}{(x-1)^2}$

j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \operatorname{ch} \sqrt{x^2+1}$

l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$

EXERCICE 11. ◇ – ●●○ *Développements asymptotiques simples*

Donner un développement asymptotique à deux termes des suites suivantes : $(a, b, c \in \mathbb{R})$

a) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

c) $w_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$

b) $v_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n})$

d) $x_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

EXERCICE 12. ♣ – ●●○ *Équivalent d'une combinaison linéaire*

Peut-on trouver trois réels a , b et c tels que, en 0 :

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1} \sim cx?$$

EXERCICE 13. ♣/◇ – ●●○ *Développement asymptotique de $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$*

Déterminer un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$, à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3 Asymptotique des suites et fonctions implicites

EXERCICE 14. ♣/◇ – ●●○ *Suite implicite, Acte I*

1. Montrer que, sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$, $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ a une unique solution, que l'on note x_n .
2. Donner un équivalent de x_n .
3. Montrer que $y_n = x_n - n\pi$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.
4. On pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ (qu'on déterminera) telle que $z_n \sim \frac{\alpha}{n}$.
5. En déduire un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 15. ●●○ *Suite implicite, Acte II*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de x_n .
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n .

EXERCICE 16. ●●○ *Suite implicite, Acte III*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^4 + x^3 = n$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de x_n .
3. Montrer que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

EXERCICE 17. ♣ – ●●○ *Suite implicite, Acte IV*

Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite (croissante) des solutions positives de l'équation $(1+x)\sin x = 1$.

EXERCICE 18. ●○○ *Développement limité de tan, en passant par Arctan*

Déterminer le $DL_5(0)$ de $\tan$, en utilisant la relation $\tan(\text{Arctan } x) = x$.

EXERCICE 19. ♣ – ●●○ *Développement limité d'une bijection réciproque*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est bijective et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer le $DL_5(0)$ de f^{-1} .

EXERCICE 20. ●●○ *Développement asymptotique d'une fonction implicite*

Pour tout $t \geq 0$, on définit la fonction $g_t : x \mapsto x^3 + tx - 1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, l'équation $g_t(x) = 0$ a une unique solution notée $u(t)$.
2. Montrer que u est strictement décroissante. En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

EXERCICE 21. ●●○ *Développement limité d'une fonction implicite*

Montrer que l'équation $x + x^4 = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution lorsque $y \in \mathbb{R}$ est suffisamment proche de 0. On la note $f(y)$. Déterminer le $DL_{12}(0)$ de f .

4 Autres exercices

EXERCICE 22. ◇ – ●●○ *Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$*

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ sur $]0, \pi/2]$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que le prolongement de f est de classe $\mathcal{C}^1$.

EXERCICE 23. ♣ – ●●○ *Prolongement $\mathcal{C}^\infty$ du taux d'accroissement*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. On définit g par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. On souhaite montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Montrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, établir une relation simple entre $f^{(n)}(x)$, $g^{(n-1)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ admet un prolongement par continuité en 0 défini par $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ et que $g^{(n)}$ admet un développement limité à tout ordre en 0.
4. Conclure.

EXERCICE 24. $\diamond - \bullet \bullet \circ$ *Calcul de dérivées supérieures*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les 5 premières dérivées en 0 de la fonction $\frac{\ln(\cos x)}{1+x}$.

EXERCICE 25. $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$ *Étude de tangentes*

Faire l'étude de la tangente au point d'abscisse 0, aux courbes d'équation :

a) $y = \frac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)}$

b) $y = (\operatorname{ch}(x))^{1/x}$

EXERCICE 26. $\clubsuit - \bullet \bullet \circ$ *Étude d'asymptotes*

Étudier l'asymptote en $+\infty$ des courbes d'équation :

a) $y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$

b) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$

Indications

Exercice 5. Encadrer la suite (u_n) en utilisant sa décroissance.

Exercice 11. Pour les suites dépendant de constantes a, b, c , attention aux cas particuliers !

Exercice 13. On ne peut pas sommer un nombre infini de o ; revenir à la définition.

Exercice 14. Pour 2., encadrer simplement x_n ; pour 3. et 4., obtenir une équation sur y_n , puis z_n .

Exercice 22. Écrire un DL à l'ordre 1 de f ne suffit pas ; il est plus pertinent d'écrire un DL à l'ordre 0 de f et de f' .

Exercice 24. My Taylor is rich.