

STATIQUE DU SOLIDE – 1^{ère} Partie

Actions mécaniques ponctuelles et PFS

TRAVAUX DIRIGÉS



*Illustration : barrage de Couesnon (Mont Saint Michel)
Le barrage, construit en 2009, utilise la force des eaux mêlées de la marée et du fleuve Couesnon pour éviter l'ensablement du Mont Saint Michel prévu à l'horizon 2040. Cet ouvrage technologique est dimensionné pour supporter les efforts hydrodynamiques considérables !*

Table des matières

1. BOITIER DE DIRECTION	2
2. MECANISME D'INDEXAGE ET INDICATEUR DE SURCOUPLE	3
3. ETUDE STATIQUE D'UNE MOTO : EFFORT DE CONTACT PNEU/SOL	5
4. COUPLE MOTEUR NECESSAIRE POUR OUVRIR UN PORTAIL A VANTAUX	6
5. LOI ENTREE SORTIE STATIQUE DU BRAS DE ROBOT MAXPID	10

1. BOITIER DE DIRECTION

Objectif

Déterminer le couple en sortie d'un boîtier de direction permettant d'imposer la rotation des roues d'un camion en fonction du couple exercé sur le volant.

Les figures 8.1 et 8.2 représentent le mécanisme d'un boîtier de direction de camion. À partir d'une action sur le volant, lié à un arbre d'entrée (1), le boîtier de direction transmet le mouvement de direction aux roues avant par l'intermédiaire d'un ensemble de biellettes reliées à un arbre de sortie (3).



Figure 8.1 – Boîtier de direction de camion.

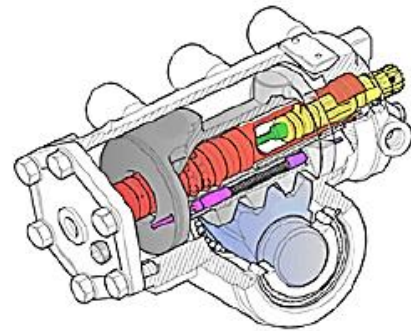


Figure 8.2 – Modèle 3D du boîtier de direction.

Pour l'étude qui nous intéresse, nous considérerons une position particulière des pièces du mécanisme pour laquelle les roues du véhicule ne sont pas braquées ; ce qui revient à considérer l'écrou (2) en position médiane, comme sur le schéma cinématique donné sur la figure 8.3. Les résultats des calculs pourront être interprétés à la limite du braquage.

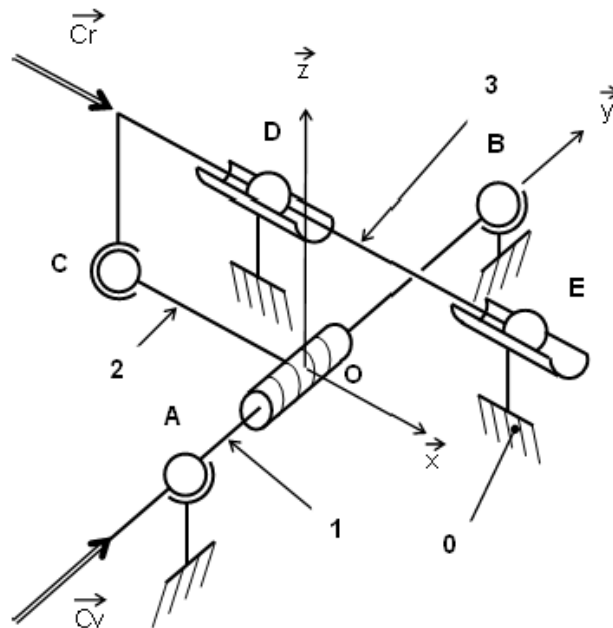


Figure 8.3 – Schéma cinématique du boîtier de direction.

Hypothèses et notations

La vis (1) possède une hélice à droite avec un pas réduit noté p^* (en m/rad) ;

On note :

\vec{C}_v le couple d'entrée appliqué par le volant sur l'arbre 1 : $\vec{C}_v = C_v \vec{y}$

\vec{C}_r le couple de sortie appliqué par les biellettes reliées aux roues sur l'arbre 3 :

$$\vec{C}_r = C_r \vec{x}.$$

Les coordonnées des différents points dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont

$$A(0; y_A; 0), B(0; y_B; 0), C(x_C; 0; 0), D(x_D; 0; k), E(x_E; 0; k)$$

Le poids des pièces est négligé par rapport à l'intensité des efforts mis en jeux ;

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Questionnaire

Q1. Colorier le schéma cinématique puis réaliser le graphe de structure du mécanisme en vue d'une étude statique.

Q2. Isoler l'arbre de sortie 3 : par application judicieuse du théorème du moment établir la relation entre le couple C_v et l'action dans la liaison sphérique de 2 sur 3 en E.

Q3. Terminer la résolution par les isoléments judicieux nécessaires.

2. MECANISME D'INDEXAGE ET INDICATEUR DE SURCOUPLE

Le mécanisme représenté permet de maintenir dans une position angulaire donnée le disque 2. Ce dernier est en liaison pivot avec le bâti 1 en O_1 . Il est muni d'une encoche inclinée dans laquelle vient se loger un galet 3 de forme cylindrique.

3 est en liaison pivot avec un levier 4 en B. Ce levier 4 est en liaison pivot avec le bâti en C.

La forme cylindrique du galet (3) est en appui sur le plan incliné selon \vec{x}'_2 de l'encoche.

Un ressort de compression 5 maintient le galet dans l'encoche tant que le couple C_m exercé sur le disque ne dépasse pas une valeur limite C_L fixée (120 Nm).

Quand le couple sur le disque dépasse cette limite, le galet roule sur le plan incliné de l'encoche : M se déplace le long de la droite (A, x_2') . Le levier 4 bascule alors vers le haut, puis le contact en P devient effectif. Cela déclenche un signal témoignant d'une surcharge.

Les dimensions sont :

$$O_1A = a; AM = \lambda$$

$$MB = r \text{ (rayon galet)}$$

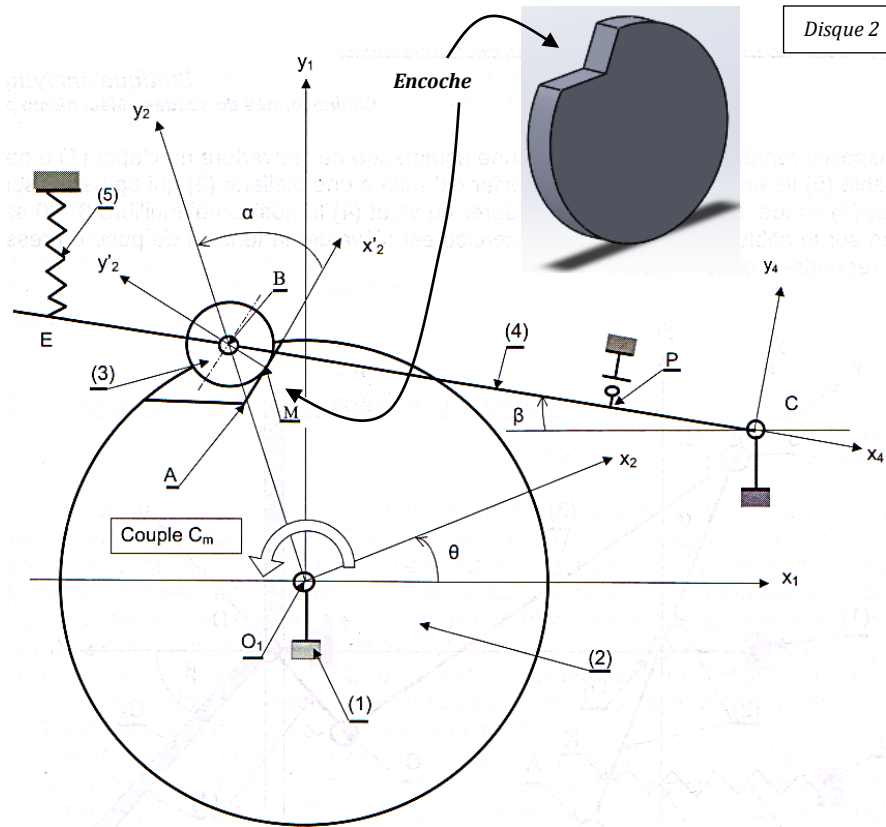
$$CB = b; BE = c; CP = L$$

$$O_1C = h.\vec{x}_1 + k.\vec{y}_1$$

L'action du ressort est modélisée par un glisseur donc la norme est F_r , dirigé selon \vec{y}_1

Hypothèses

- Liaisons parfaites
- Poids négligés devant les autres forces
- Problème plan



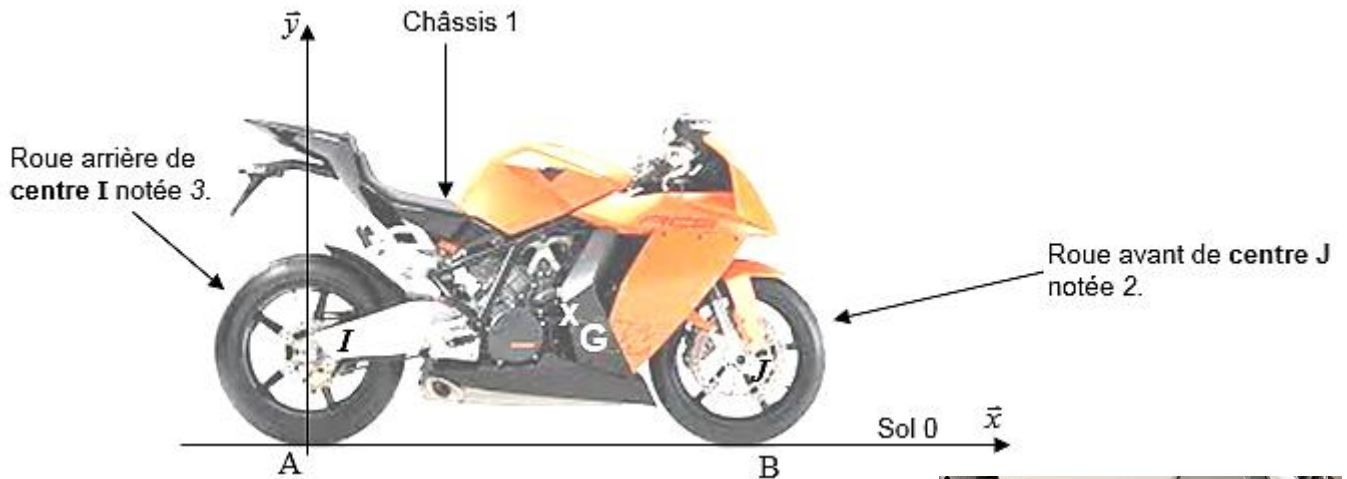
Objectif

Déterminer la précharge nécessaire du ressort 5 afin que le contacteur en P soit actif lorsque le couple C_m atteint une valeur limite C_L donnée.

1. Liaison 3/2 : donnez son nom et ses caractéristiques géométriques.
2. Action mécanique de 2 sur 3 : écrire le torseur de l'action mécanique transmissible de 2 sur 3 dans l'espace, puis, réécrire ce torseur en considérant le cas plan ici présent.
3. Faire le graphe de structure customisé en vue d'une étude statique.
4. Faire les figures de changement de base.
5. Par application du théorème du moment au point O_1 sur (2), déterminez la relation entre le couple C_m et l'effort de 3 sur 2 en M, Y_{32} (= composante suivant \vec{y}_2).
6. Faire un isolement judicieux et déterminer la relation entre F_r et Y_{23} .
7. Terminer le problème : déterminer F_r en fonction de C_m .
8. AN : $C_m = C_{Lim} = 120 \text{ Nm}$, $a = 120 \text{ mm}$, $b = 200 \text{ mm}$, $c = 300 \text{ mm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = -10^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\lambda = 6 \text{ mm}$. Déterminez le tarage du ressort, F_{ress} .

3. ETUDE STATIQUE D'UNE MOTO : EFFORT DE CONTACT PNEU/SOL

On veut étudier les actions de contact pneu/sol quand une moto de puissance moyenne évolue à sa vitesse maximale et constante.



Les caractéristiques utiles de la moto sont :

Empattement : $E=AB=1,56\text{m}$

Position centre de gravité G : $\vec{AG} = a.\vec{x} + b.\vec{y}$, $a=78\text{ cm}$, $b=65\text{cm}$

Masse avec conducteur : $M=280\text{ kg}$

Couple maxi à la roue arrière sur le dernier rapport (en « 6^{ème} vitesse ») : $C_{arr} = -250\text{ Nm}$

Diamètre roue arrière : $D=64\text{ cm}$



Hypothèses

Masse de la moto concentrée en son centre de gravité G.

Roulement sans glissement entre roues et sol.

Résistance au roulement pneu/sol négligé.

Liaison pivot des roues/châssis parfaites (pas de frottement).

Problème plan.

Moto à vitesse constante en ligne droite donc en équilibre relatif : le PFS s'applique.



Actions mécaniques particulières

Action du sol sur la roue arrière en A : glisseur, $\vec{R}_A = X_A\vec{x} + Y_A\vec{y}$

Action du sol sur la roue avant en B : glisseur, $\vec{R}_B = X_B\vec{x} + Y_B\vec{y}$

Poids de la moto en G : $-Mg\vec{y}$

Torseur de l'action motrice de la chaîne de transmission sur la roue arrière : $\{\mathcal{F}(ch \rightarrow 3)\} =$

$$\begin{cases} F_{ch}\vec{x} \\ C_{arr}.\vec{z} \end{cases}$$

- Isoler la roue avant et démontrer que la composante tangentielle X_B d'action mécanique du sol sur la roue avant est nulle : $X_B=0$.
- Isoler la roue arrière et déterminer la relation littérale entre le couple C_{arr} et l'action de contact pneu arrière/sol X_A . AN : calculer X_A .
- Déterminez l'action de contact Y_A .
- Déterminez l'action de contact Y_B .
- AN : déterminer Y_A et Y_B .
- Vérifiez qu'il y a adhérence pneu/sol. Le coefficient d'adhérence f , pneu/bitume est compris entre 0,5 (route mouillée) et 1,2 (bitume neuf, sec et chaud).

On considère que l'effort résistant prépondérant est la trainée aérodynamique, et que les autres efforts résistants sont négligeables. La force de trainée est $F_{tx} = \frac{1}{2}\rho \cdot SC_x \cdot V^2$.

ρ est la masse volumique de l'air, et $SC_x=0.35 \text{ m}^2$ pour la moto considérée.

- Calculez la vitesse maxi atteinte au couple maxi au 6ème rapport. Vous préciserez l'isolement et le théorème appliqué.

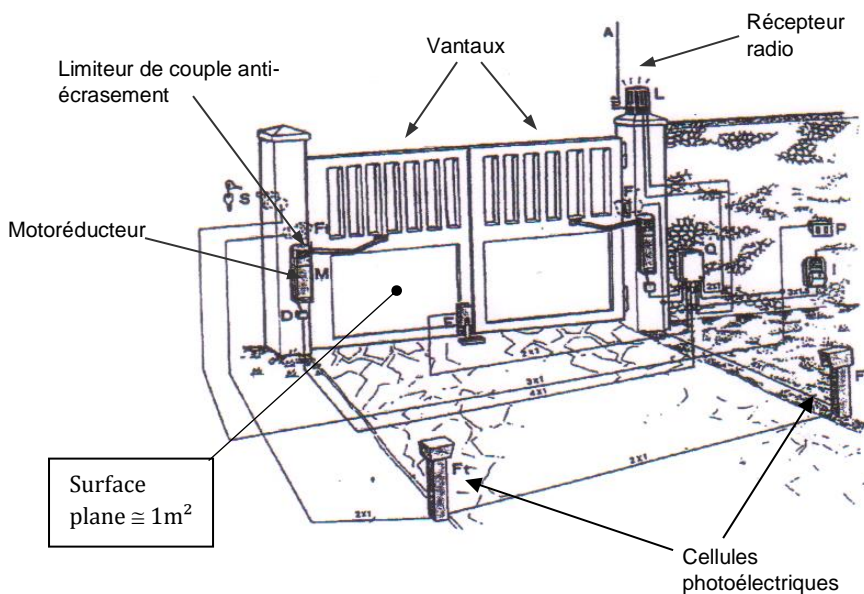
4. COUPLE MOTEUR NECESSAIRE POUR OUVRIR UN PORTAIL A VANTAUX

Il s'agit du portail à vantaux équipant le laboratoire de SII.

Lorsque l'utilisateur commande l'ouverture du portail, le motoréducteur est alimenté. Son arbre de sortie est solidaire du bras de poussée 2. Lors de sa rotation, celui-ci entraîne la biellette 3.

La biellette 3 entraîne alors le vantail, qui s'ouvre en pivotant selon l'axe (A, \vec{z}) .

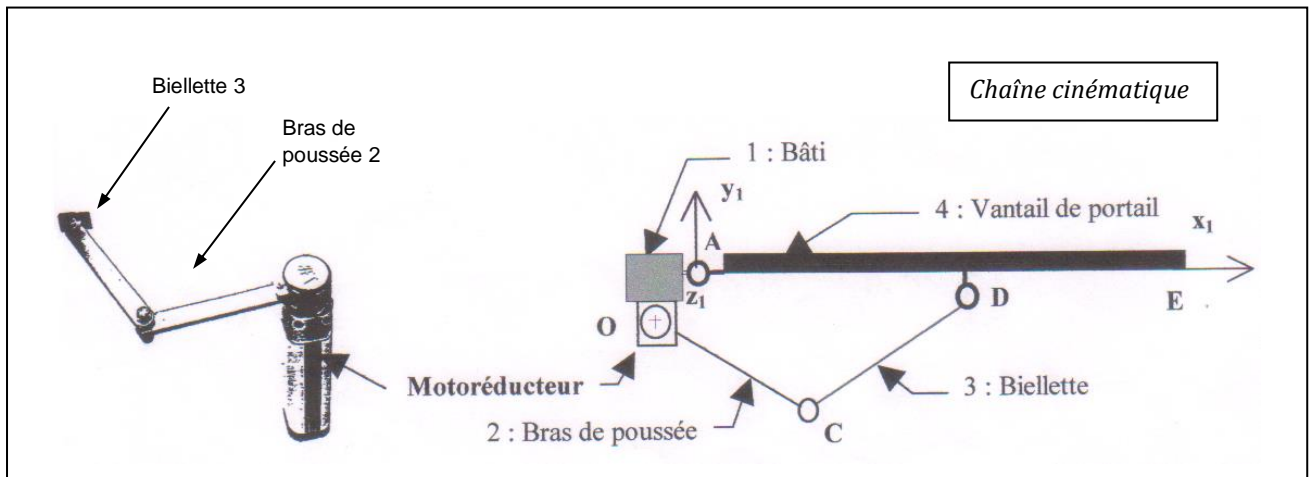
Toutes les liaisons sont des pivots parfaites. Le problème est plan.



Mise en situation : contexte

Caractéristiques techniques du motoréducteur

- Moteur électrique monophasé 4 poles 230 V 50 Hz
- Vitesse angulaire nominale moteur : $N_{nom} = 1300 \text{ tr/min}$
- Courant consommé à vide : 0,8 A
- Réducteur constitué de : 4 réducteurs épicycloïdaux de rapport de réduction $= r_1 = 1/6$, chacun. Rendement $\eta_1=0,95$, chacun.
- Couple disponible en sortie du motoréducteur : 35 daN.m avec condensateur 8mF



Cahier des charges de la chaîne d'action (moteur+bielle+bras+vantail)

	Critère	Niveau
Exigence : Animer un vantail	Durée d'ouverture	Inférieure à 25s
	Couple moteur maxi à fournir	Le plus faible possible tout en étant inférieur à 0,8 fois le couple sur le vantail (protection du moteur)
	Vitesse du vent résistant	Vmaxi vent retenu, Vmax=100 km/h

Paramétrage

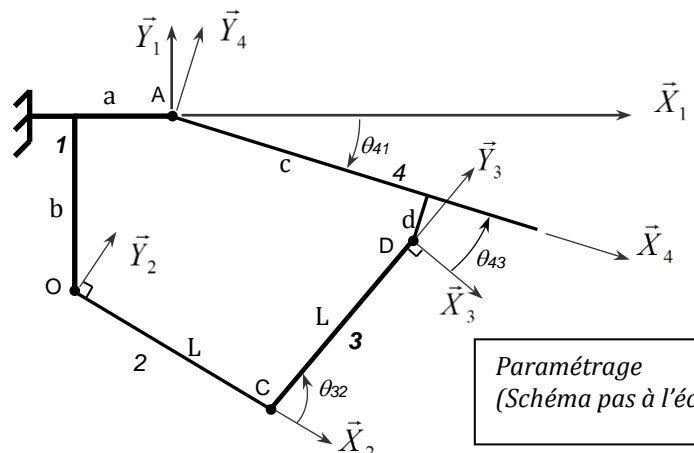
$$\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_1 + b \cdot \vec{y}_1 \quad \vec{AD} = c \cdot \vec{x}_4 - d \cdot \vec{y}_4$$

$$\vec{CD} = L \cdot \vec{y}_3 \quad \vec{OC} = L \cdot \vec{x}_2$$

a=100 mm ; d=20mm ; L=280mm ;
 Les distances b et c sont réglables. Les autres sont fixes. (b=160mm souvent)

$$\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{y}_3) \quad \theta_{43} = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$$

$$\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \theta_{41} = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$$



Actions mécaniques

L'action mécanique du moteur sur le bras 2 se modélise par un couple :

$$\{T_{mot \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{C}_m \end{Bmatrix}.$$

Avec $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}$.

L'action mécanique résultant de l'action du vent sur le vantail, ou de toute autre action résistante, se modélise par le torseur suivant réduit au point A : $\{T_{vent \rightarrow 4}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_v \\ \vec{C}_v \end{array} \right\}$.

Avec $\vec{C}_v = C_v \cdot \vec{z}$.

Remarque : C_m et C_v sont des composantes de vecteur, donc des grandeurs positives ou négatives.

Pour les actions mécaniques, les notations imposées sont :

- la résultante d'un solide i sur un solide j : $\vec{R}(i \rightarrow j)$,
- le moment d'un solide i sur un solide j : $\vec{M}_p(i \rightarrow j)$.

Partie 1

Objectif

Déterminer la loi entrée sortie statique, soit le rapport $\frac{C_m}{C_v}$, et vérifier le CDCF concernant le critère de couple.

Q1. Faire le graphe de structure en vue d'une étude statique. Par isolement de 3 montrer que les résultantes suivantes peuvent s'écrire :

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = Y_{34} \cdot \vec{Y}_3 \quad \text{et} \quad \vec{R}(3 \rightarrow 2) = Y_{32} \cdot \vec{Y}_3.$$

C'est-à-dire qu'elles ont même support donc ne comporte qu'une composante selon (CD).

Q2. Isoler le bras de poussée 2. Par application du théorème du moment statique au point O projeté sur l'axe \vec{Z} , déterminer la relation entre C_m et Y_{32} : $C_m + L \cdot Y_{32} \cdot \sin \theta_{32} = 0$.

Q3. De manière proche de la résolution précédente, isoler le vantail 4, et appliquer le PFS de manière judicieuse pour déterminer la relation entre C_v et Y_{34} .

Q4. Calculer le rapport $\frac{C_m}{C_v}$ en fonction des angles θ_{32} et θ_{43} .

Q5. Par votre appropriation/compréhension pratique du mécanisme et du sens des couples moteur et résistant : analyser le signe de $\frac{C_m}{C_v}$ et comparer avec l'expression

mathématique de $\frac{C_m}{C_v}$. Vérifiez la cohérence des signes.

La simulation cinématique du portail sous Solidworks Méca3D pour une géométrie $b=160$, $c=422$ donne les valeurs des paramètres géométriques angulaires indiqués dans le tableau donné ci-contre.

Entrée (°)	Sorties (dégré °)			Cm/Cv
	téta 41	téta 32 (2014)	téta 43 (2014)	
0		30,37	59,8	-0,17
10		45,47	49,81	-15,28
20		58,03	41,35	-29,38
30		69,34	33,86	-43,2
40		79,84	27,22	-57,06
50		89,67	21,49	-71,16
60		98,85	16,84	-85,69
70		107,32	13,52	-100,84
80		114,93	11,87	-116,8
90		121,43	12,31	-133,73

Q6. Remplissez le tableau ci-contre. Tracez la courbe $\frac{C_m}{C_v}$ en fonction de l'angle du vantail.

Q7. Le critère de couple du CDCF est-il validé pour la configuration géométrique « *vantail fermé* » ?

Q8. Le même critère est-il validé pour toute position du portail ?

Partie 2 : Evaluation du couple résistant sur le vantail

L'action du vent sur le vantail impose un couple résistant et permet le choix du motoréducteur (voir CDCF du portail). L'AM du vent sur le vantail est modélisée par un glisseur perpendiculaire au vantail et pointant à $L=50$ cm de l'axe de rotation de celui-ci. Le vantail est « plein » et de surface plane, rectangulaire, de surface 1 m^2 (voir schéma du contexte). Le coefficient de traînée ($=C_x$, sans unité) d'une surface plane est $C_x=1,5$.

Q9. Calculez le couple résistant sur le vantail : C_v .

On donne l'expression de l'effort résistant à la pénétration d'un solide dans un fluide :

$$F = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot V^2$$

F = Traînée en N
 ρ = masse volumique du fluide (1 kg/m^3)
 C_x = coefficient de pénétration dans un fluide = coefficient de traînée
 S = surface frontale appelée « maître couple » (projetée sur le plan perpendiculaire à la vitesse d'avancement \vec{v})

Q10. Pour les longueurs b et c données précédemment, déduire le couple nécessaire en sortie du motoréducteur pour la configuration du mécanisme entraînant le couple moteur maximal en valeur absolue. Validez le choix du motoréducteur. Jusqu'à quelle vitesse du vent l'actionneur peut-il ouvrir le portail ?

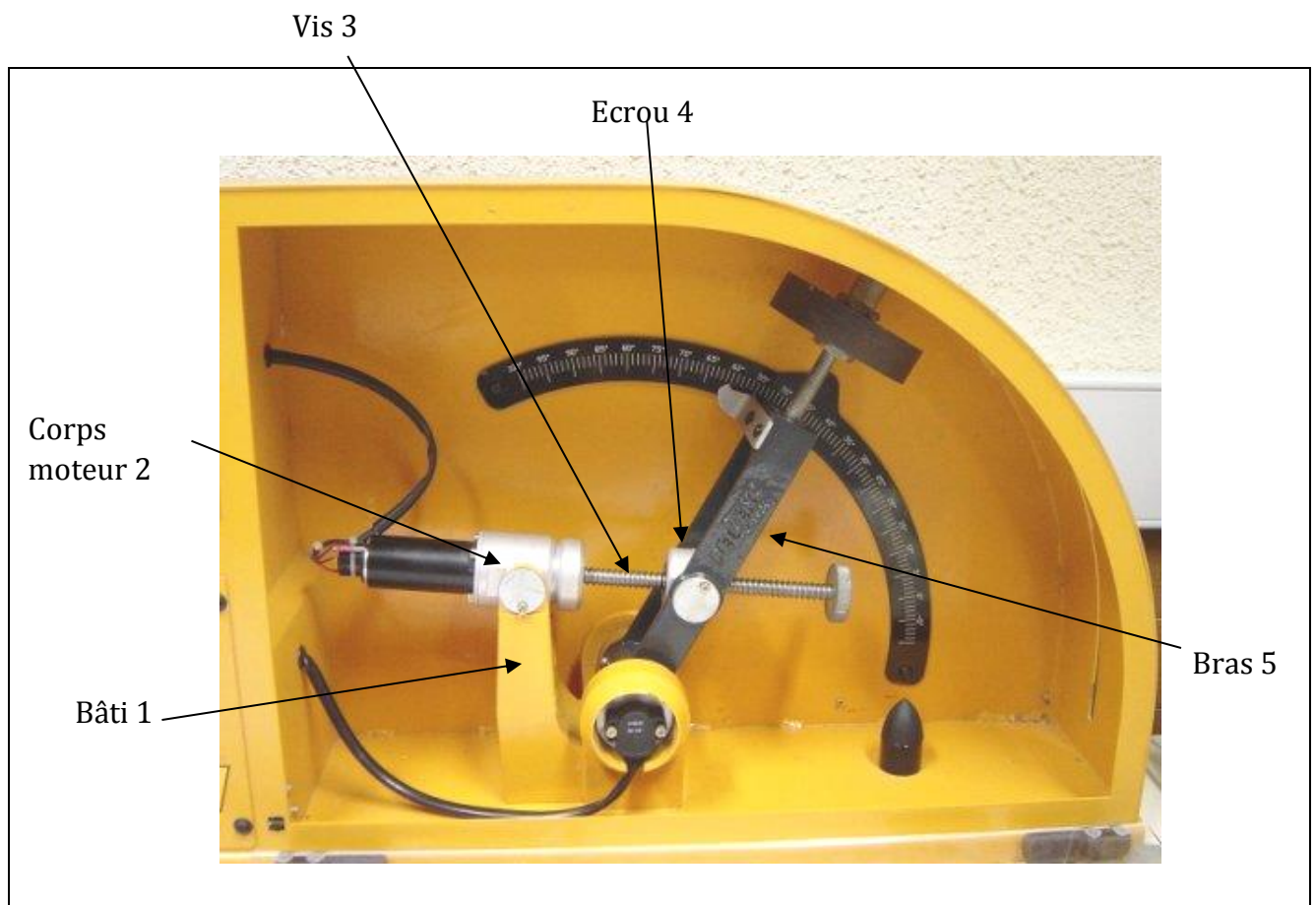
Q11. Calculer le couple nécessaire maximal à fournir par le moteur.

5. LOI ENTREE SORTIE STATIQUE DU BRAS DE ROBOT MAXPID

Mise en situation - But de l'étude

Le bras de robot Maxpid équipe les laboratoires de SII. C'est la maquette d'un système utilisé dans le domaine agricole. Le modèle cinématique retenu pour l'étude est présenté ci-après.

L'objectif est le calcul de la loi entre le couple moteur et la position du bras $C_m=f(\theta)$. C'est-à-dire le couple nécessaire que le moteur doit fournir, C_m , pour maintenir le bras en équilibre à la position θ .



Hypothèses

L'ensemble des actions de pesanteur est négligée pour tous les solides sauf pour la masse M (placée au point M) et supposée ponctuelle.

Les couples de solides $2/1$, $2/3$, $4/5$, $5/1$ sont en liaison pivot respectivement suivant (B, \vec{z}_0) , (B, \vec{x}_2) , (C, \vec{z}_0) , (A, \vec{z}_0) .

Liaison hélicoïdale d'axe $(C, \vec{x}_{2,3,4})$ entre 3 et 4.

Toutes ces liaisons sont parfaites.

Présentation des sous-ensembles cinématiquement équivalents

Données

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1; a = 70 \text{ mm}$$

$$\overrightarrow{OB} = b\vec{y}_1; b = 80 \text{ mm}$$

$$\overrightarrow{AC} = c\vec{x}_5; c = 80 \text{ mm}$$

$$\overrightarrow{AM} = e\vec{x}_5; e = 280 \text{ mm}$$

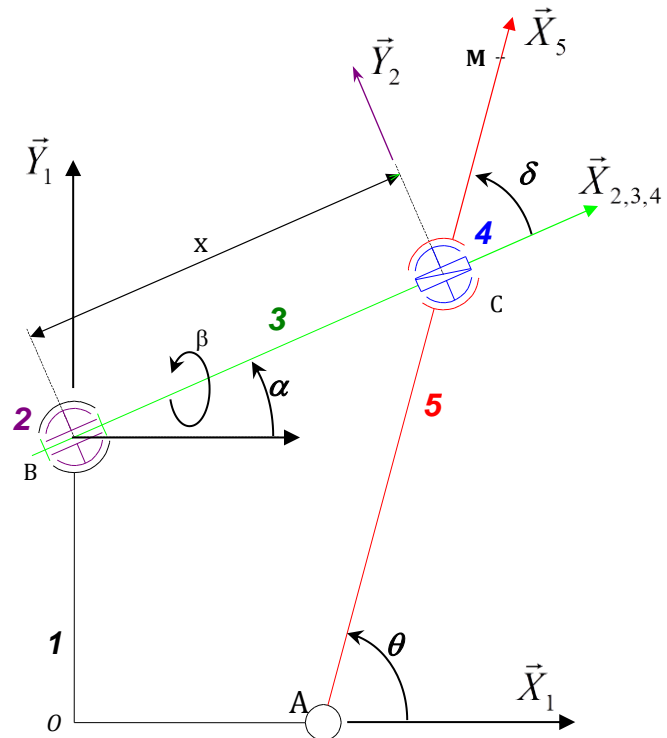
$$\overrightarrow{BC} = x \cdot \vec{x}_2$$

Pas vis/écrou = $p = 4 \text{ mm}$ à droite

Question préliminaire

Ecrire le torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison hélicoïdale $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\}$.

Déduire de ce torseur que le présent problème de statique n'est pas plan.

**Questionnaire statique**

1. Faire le graphe de structure du mécanisme en vue d'une étude statique.

On note la résultante de l'AM de 4 sur 5 : $\overrightarrow{R}(4 \rightarrow 5) = X_{45} \cdot \vec{x}_2 + Y_{45} \cdot \vec{y}_2 + Z_{45} \cdot \vec{z}_2$

2. Par application du théorème du moment au bras 5, au point A projeté sur l'axe \vec{Z}_1 , déterminez la relation scalaire entre X_{45} , Y_{45} , θ , δ , M , et toutes autres données nécessaires.

3. Démontrer par application du théorème du moment au point B, selon l'axe \vec{Z}_1 à l'ensemble de solides $\{2,3,4\}$, que la composante Y_{45} est nulle.

4. Terminer le problème par une suite d'isollements judicieux : déterminer l'expression littérale du couple moteur Cm exercé par le moteur sur la vis en fonction de θ et δ afin que l'ensemble soit en équilibre. Vérifier l'homogénéité dimensionnelle.