

# Graphes d'intervalles

## I Introduction

On considère le problème concret suivant : des cours doivent avoir lieu dans un intervalle de temps précis (de 8h à 9h55, ...) et on cherche à attribuer une salle à chaque cours. On souhaite qu'à tout moment une salle ne puisse être attribuée à deux cours différents et on aimerait utiliser le plus petit nombre de salles possibles. Ce problème d'allocation de ressources (ici les salles) en fonction de besoins fixes (ici les horaires des cours) intervient dans de nombreuses situations très diverses (allocation de pistes d'atterrissage aux avions, répartition de la charge de travail sur plusieurs machines, ...).

### I.A Représentation du problème

On modélise le problème ainsi :

- chaque besoin est représenté par un segment  $[a, b]$  où  $a, b \in \mathbb{N}$  et  $a \leq b$ ;
- deux besoins  $I$  et  $J$  sont en conflit quand  $I \cap J \neq \emptyset$ .

La donnée du problème est une suite finie  $(I_0, \dots, I_{n-1})$  de  $n$  segments où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

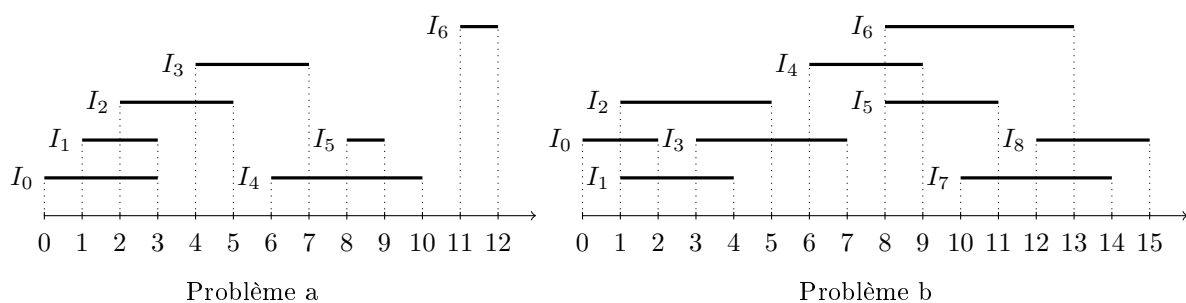


Figure 1 Deux exemples de problèmes

On représente un segment en Caml par un couple d'entiers, la donnée du problème est une valeur du type `(int*int) array`.

**Question I.A.1.** Écrire une fonction ayant pour signature

`conflict : int * int -> int * int -> bool`

telle que `conflict I J` renvoie `true` si et seulement si  $I$  et  $J$  sont en conflit.

### I.B Graphe simple non orienté

On appelle graphe simple non orienté un couple  $G = (S, A)$  où

- $S$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les sommets du graphe;
- $A$  est un ensemble de paires d'éléments distincts de  $S$ . Lorsque  $\{x, y\} \in A$  on dit que  $x$  et  $y$  sont reliés dans  $G$  et  $\{x, y\}$  est appelée une arête de  $G$ . Les sommets reliés à un sommet  $x$  sont appelés les voisins de  $x$ .

Étant donnée une énumération de  $S$  sous la forme d'une suite finie  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  on représente  $A$  en Caml par un élément du type `int list array` ainsi : pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , la liste  $A.(i)$  contient les  $j$  tels que  $x_i$  soit relié à  $x_j$  dans  $G$ .

On représente graphiquement le graphe  $G$  par un diagramme où les arêtes sont représentées par des traits entre les sommets.

Les arêtes du graphe dont une représentation graphique est donnée figure 2 sont représentées en Caml par le tableau :

`[| [1;2;3]; [0;2;3]; [0;1;3;4]; [0;1;2]; [2] |]`

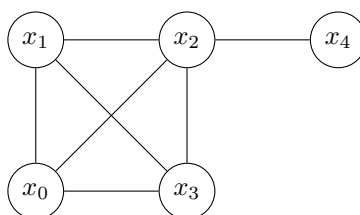


Figure 2

Une telle liste d'arêtes suffit pour déterminer un graphe lorsque l'énumération des sommets est connue car on peut alors identifier un sommet à son indice. Dans la suite de ce problème on identifiera ainsi un graphe à sa liste d'arêtes.

### I.C Graphe d'intervalles

Soit  $\bar{I} = (I_0, \dots, I_{n-1})$  une suite finie de segments, on appelle graphe d'intervalles associé à  $\bar{I}$  le graphe  $G(\bar{I})$

- dont les sommets sont les segments  $I_0, \dots, I_{n-1}$
- et où, pour  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ , avec  $i \neq j$ , les sommets  $I_i$  et  $I_j$  sont reliés si et seulement si ils sont en conflit. Le graphe d'intervalles qui correspond au problème a de la figure 1 admet la représentation graphique de la figure 3.

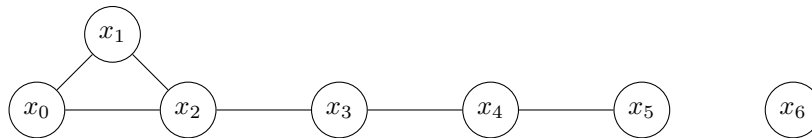


Figure 3

**Question I.C.1.** Donner une représentation graphique du graphe d'intervalles associé au problème b de la figure 1.

**Question I.C.2.** Écrire une fonction ayant pour signature

**construit\_graphe : (int \* int) array -> int list array**

qui étant donné le tableau des segments  $\bar{I} = (I_0, \dots, I_{n-1})$ , énumérés dans cet ordre, renvoie la représentation des arêtes de  $G(\bar{I})$ .

### I.D Coloration

Soit  $G = (S, A)$  un graphe simple non orienté dont les sommets sont  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . On appelle coloration de  $G$  une suite finie d'entiers naturels  $(c_0, \dots, c_{n-1})$  telle que

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n-1\}^2, \quad \{x_i, x_j\} \in A \Rightarrow c_i \neq c_j$$

L'entier  $c_i$  est appelé la couleur du sommet  $x_i$  et la condition se traduit ainsi : deux sommets reliés ont des couleurs distinctes. Dorénavant, le terme couleur sera synonyme d'entier naturel.

La suite finie  $(0, 1, 2, 3, 0)$  est une coloration du graphe de la figure 2.

Lorsqu'une coloration utilise le plus petit nombre de couleurs distinctes possibles, on dit qu'elle est optimale. On note alors  $\chi(G)$  ce nombre minimum de couleurs, appelé le nombre chromatique de  $G$ .

En associant une salle à chaque couleur, on peut répondre au problème initial à l'aide d'une coloration de son graphe d'intervalles associé.

**Question I.D.1.** Déterminer des colorations optimales pour les graphes d'intervalles associés aux deux problèmes de la figure 1. On attribuera à chaque fois la couleur 0 à l'intervalle  $I_0$ .

**Question I.D.2. Couleur disponible**

a) Écrire une fonction de signature

**appartient : int list -> int -> bool**

telle que l'appel à **appartient**  $l$   $x$  envoie **true** si et seulement si l'entier  $x$  est présent dans la liste  $l$ .

b) Écrire une fonction de signature

**plus\_petit\_abscent : int list -> int**

telle que l'appel à **plus\_petit\_abscent**  $l$  renvoie le plus petit entier naturel non présent dans  $l$ .

c) On considère ici une coloration progressive des sommets d'un graphe. Pour cela, une coloration partielle est un tableau **couleurs : int array** tel que **couleurs.(i)** contient la couleur de  $i$  s'il est coloré et  $-1$  sinon, ce qui ne pose pas de problème car les couleurs sont toujours positives.

Écrire une fonction de signature

**couleurs\_voisins : int list array -> int array -> int -> int list**

telle que l'appel à **couleurs\_voisins**  $arete$   $couleurs$   $i$  renvoie la liste des couleurs des voisins colorés du sommet d'indice  $i$  dans le graphe décrit par  $aretes$  où le tableau **couleurs** décrit une coloration partielle.

d) En déduire, une fonction de signature

**couleur\_disponible : int list array -> int array -> int -> int**

telle que l'appel à **couleur\_disponible aretes couleurs**  $i$  renvoie la plus petite couleur pouvant être attribuée au sommet  $i$  afin qu'il n'ait la couleur d'aucun de ses voisins dans le graphe décrit par **aretes**.

## I.E Cliques

Soit  $G = (S, A)$  un graphe

Un sous-ensemble  $C \subset S$  est appelé une clique de  $G$  lorsqu'il vérifie

$$\forall x, y \in C, \quad x \neq y \Rightarrow \{x, y\} \in A$$

Le nombre d'éléments de  $C$  est appelé sa taille. La taille de la plus grande (celle qui possède le plus grand nombre d'éléments) clique de  $G$  est notée  $\omega(G)$ .

**Question I.E.1.** Déterminer  $\chi(G)$  et  $\omega(G)$  lorsque

a)  $G$  ne possède pas d'arête (c'est à dire  $A = \emptyset$ ).

b)  $G$  est un graphe complet à  $n$  sommets, c'est à dire  $|S| = n$  et pour tous  $u, v \in S$  distincts,  $\{u, v\} \in A$ .

**Question I.E.2.** Comparer  $\chi(G)$  et  $\omega(G)$  pour un graphe  $G$  quelconque.

**Question I.E.3.** Ecrire une fonction de signature

**est\_clique : int list array -> int list -> bool**

telle que **est\_clique aretes xs** renvoie **true** si et seulement si la liste **xs** est une liste d'indices de sommets formant une clique dans le graphe décrit par **aretes**.

## II Algorithme glouton pour la coloration

Etant donnée une liste de segments  $\bar{I} = (I_0, \dots, I_{n-1})$  de longueur  $n \geq 1$ , on se propose de déterminer une coloration optimale de son graphe d'intervalles associé. On appelle coloration de  $\bar{I}$  une suite finie d'entiers naturels  $(c_0, \dots, c_{n-1})$  telle que

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, \quad I_i \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow c_i \neq c_j$$

On suppose dans cette partie que les segments  $I_k = [a_k, b_k]$ , pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , sont énumérés dans l'ordre croissant de leur extrémités gauches, c'est-à-dire que

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$$

On propose l'algorithme suivant :

Pour  $k$  variant de 0 à  $n-1$ , colorer l'intervalle  $I_k$  avec la plus petite couleur non encore utilisée dans la coloration des intervalles  $I_j$ , avec  $0 \leq j < k$ , qui ont une intersection non vide avec  $I_k$ .

Ainsi, l'intervalle  $I_0$  est toujours coloré avec la couleur 0, l'intervalle  $I_1$  reçoit la couleur de 0 si  $I_0 \cap I_1 = \emptyset$ , et la couleur 1 sinon, etc.

### II.A L'algorithme sur un exemple

**Question II.A.1.** Déterminer la coloration renvoyée par l'algorithme pour le problème  $b$  décrit sur la figure 1.

### II.B Coloration

**Question II.B.1.** Ecrire une fonction de signature

**coloration : (int \* int) array -> int list array -> int array**

telle que l'appel **coloration segments aretes**, où **segments** est un tableau contenant des segments triés par ordre croissant de leurs extrémités gauches et où **aretes** représente les arêtes du graphe d'intervalles associé à ces segments, renvoie la coloration obtenue avec l'algorithme ci-dessus.

## II.C Preuve de l'algorithme

On se propose maintenant de démontrer que l'algorithme ci-dessus fournit une coloration optimale de l'ensemble de segments. Soit  $k$  un entier entre 0 et  $n-1$ . On suppose qu'à la  $k$ -ième étape de l'algorithme, le segment  $I_k$  reçoit la couleur  $c$ .

**Question II.C.1.** *L'extrémité gauche du segment  $I_k$  appartient à un certain nombre de segments parmi  $I_0, I_1, \dots, I_{k-1}$ . Combien au moins ?*

**Question II.C.2.** *Prouver que l'ensemble constitué de  $I_k$  et de ses voisins d'indice inférieur à  $k$  constitue une clique de taille au moins  $c+1$  dans le graphe d'intervalles associé.*

**Question II.C.3.** *En déduire que le nombre de couleurs nécessaires à une coloration de l'ensemble des segments est au moins égal à  $c+1$ .*

**Question II.C.4.** *Conclure*

## II.D Complexité

**Question II.D.1.** *Déterminer la complexité de la fonction **coloration** en fonction du nombre  $m$  d'arêtes du graphe d'intervalles associé à la liste  $\bar{I}$ .*

## III Graphes munis d'un ordre d'élimination parfait

On introduit ici la notion d'ordre d'élimination parfait, dont on montre qu'il existe toujours pour un graphe d'intervalles, et qui permet de proposer un algorithme glouton pour le problème de la coloration d'un graphe.

Soient  $G = (S, A)$  un graphe et  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  une énumération des sommets de  $G$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  on note  $G_i = (S_i, A_i)$  où  $S_i = \{x_0, \dots, x_i\}$  et

$$\forall k, l \in \{0, \dots, n-1\}, \{x_k, x_l\} \in A_i \Leftrightarrow k \leq i \text{ et } l \leq i \text{ et } \{x_k, x_l\} \in A$$

$G_i$  est ainsi le graphe déduit de  $G$  en se restreignant aux sommets de  $x_0$  à  $x_i$ .

Une énumération  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  des sommets de  $G$  est appelée un ordre d'élimination parfait si pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  les voisins de  $x_i$  d'indices inférieurs à  $i$  forment une clique.

### III.A Un exemple

**Question III.A.1.** *Déterminer un ordre d'élimination parfait pour le graphe  $G$  donné par la représentation de la figure 4.*

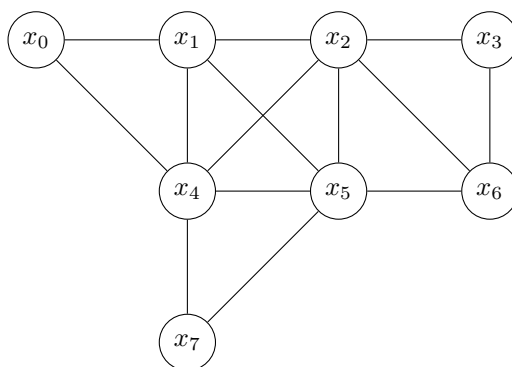


Figure 4

### III.B Vérification

**Question III.B.1.** *Ecrire une fonction de signature*

*`voisins_inferieurs : int list array -> int -> int list`*

*telle que `voisins_inferieurs aretes x` renvoie la liste des voisins du sommet d'indice  $x$  dont l'indice est strictement inférieur à  $x$ .*

**Question III.B.2.** *Ecrire une fonction de signature*

*`est_ordre_parfait : int list array -> bool`*

*telle que `est_ordre_parfait aretes` renvoie `true` si et seulement si l'énumération associée au graphe représenté par `aretes` est un ordre d'élimination parfait.*

### III.C Ordre d'élimination parfait pour un graphe d'intervalles

**Question III.C.1.** *Montrer que l'énumération des segments  $(I_0, \dots, I_{n-1})$  obtenue en les triant par leurs extrémités gauches en ordre croissant est un ordre d'élimination parfait de leur graphe d'intervalles.*

### III.D Coloration

On considère un graphe dont  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  est une énumération des sommets.

On colore ce graphe à l'aide l'algorithme suivant :

Pour  $i$  allant de 0 à  $n - 1$ , on colore  $x_i$  avec la plus petite couleur qui ne soit pas utilisée par un des voisins déjà colorés.

**Question III.D.1.** *Appliquer cet algorithme de coloration au graphe de la figure 4 muni*

- a) de l'ordre  $(x_0, \dots, x_7)$  ;*
- b) d'un ordre d'élimination parfait.*

**Question III.D.2.** *Ecrire une fonction de signature*

*`colore : int list array -> int array`*

*telle que l'appel à `colore aretes` renvoie selon cet algorithme un tableau  $\mathbf{c}$  représentant une coloration valide du graphe décrit par `aretes` où la couleur du  $i$ -ème sommet est donnée par  $\mathbf{c}(i)$ .*

**Question III.D.3.** *Soit  $(c_0, \dots, c_{n-1})$  la coloration obtenue par cet algorithme pour un graphe  $G$  dont l'énumération des sommets est un ordre d'élimination parfait.*

- a) Montrer que pour tout  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$  on a  $\chi(G) \geq 1 + c_i$ .*
- b) En déduire que l'algorithme de coloration renvoie une coloration optimale.*

## IV Ordre d'élimination parfait pour un graphe cordal

On s'intéresse ici à une nouvelle condition suffisante pour qu'un graphe admette un ordre d'élimination parfait, qui s'exprime en considérant les cycles de longueur au moins égale à 4 du graphe considéré.

Un graphe  $G$  est dit *cordal* lorsque pour tout cycle  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$  de  $G$  de longueur  $n \geq 4$ , il existe  $i, j$  distincts entre 0 et  $n - 1$  tels que les sommets  $v_i$  et  $v_j$  soient reliés dans le graphe  $G$  mais non successifs dans le cycle. Une telle arête  $\{v_i, v_j\}$  est appelée *corde* du cycle  $C$ . Autrement dit, le graphe  $G$  est cordal lorsque tout cycle de  $G$  de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde.

### IV.A Cycles de longueur 4 dans un graphe d'intervalles

Soit  $G$  un graphe d'intervalles. Dans cette question, on se propose de démontrer par l'absurde que tout cycle de longueur 4 de  $G$  possède une corde. On suppose à cet effet que  $G$  contient un 4-cycle sans corde.

On dispose donc de 4 segments  $I_0, I_1, I_2, I_3$  tels que  $I_0 \cap I_1 \neq \emptyset, I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_2 \cap I_3 \neq \emptyset, I_3 \cap I_0 \neq \emptyset$ , et  $I_0 \cap I_2 = \emptyset, I_1 \cap I_3 = \emptyset$ . On supposera pour simplifier que les extrémités des segments sont toutes distinctes.

**Question IV.A.1.** *Montrer qu'aucun des segments  $I_k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$  n'est inclus dans un autre de ces segments.*

**Question IV.A.2.** *On a donc par exemple  $\min I_0 < \min I_1 < \max I_0 < \max I_1$ . Montrer que  $\min I_1 < \min I_2 < \max I_1 < \max I_2$  et de même pour  $I_2$  et  $I_3$ .*

**Question IV.A.3.** *Conclure à une contradiction.*

## IV.B Cordalité des graphes d'intervalles

**Question IV.B.1.** *Montrer plus généralement que tout graphe d'intervalles est cordal.*

## IV.C Une enquête policière

**Question IV.C.1.** *Six personnes sont entrées dans la bibliothèque le jour où un livre rare y a été volé. Chacune d'entre elles est entrée une seule fois dans la bibliothèque, y est restée un certain temps, puis elle en est sortie. Si deux personnes étaient ensemble dans la bibliothèque à un instant donné, alors au moins l'une des deux a vu l'autre. À l'issue de l'enquête, les témoignages recueillis sont les suivants : Albert dit qu'il a vu Bernard et Édouard dans la bibliothèque. Bernard a vu Albert et Isabelle. Charlotte affirme avoir vu Didier et Isabelle. Didier dit qu'il a vu Albert et Isabelle. Édouard certifie avoir vu Bernard et Charlotte. Isabelle dit avoir vu Charlotte et Édouard. Seul le coupable a menti. Qui est-il ?*

## IV.D Ordre d'élimination parfait

Un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est dit *simplicial* lorsque l'ensemble des voisins de  $v$  dans  $G$  est une clique.

Etant donné un graphe  $G = (S, A)$  et  $S' \subset S$  un ensemble de sommets de  $G$  le *sous-graphe* de  $G$  induit par  $S'$  est le graphe  $H = (S', A')$  où  $A' \subset A$  est l'ensemble des arêtes de  $G$  dont les extrémités appartiennent à  $S'$ .

On représente en Caml un sous-graphe induit d'un graphe  $G$  possédant  $n$  sommets par le couple **(aretes, sg)** de type `int list array * bool array` où **aretes** est une description du graphe  $G$  et **sg** est un tableau de taille  $n$  tel que **sg.(i)** vaut **true** si le sommet d'indice  $i$  est un sommet du sous-graphe induit et **false** sinon.

**Question IV.D.1.** *Écrire une fonction de signature*

***simplicial** : (int list array \* bool array -> int -> bool*

*telle que l'appel à **simplicial** (aretes, sg) k, où le sommet d'indice k est supposé appartenir au sous-graphe induit H décrit par (aretes, sg), renvoie true si le sommet d'indice k est simplicial dans H et false sinon.*

*Déterminer la complexité de la fonction **simplicial**.*

**Question IV.D.2.** *Écrire une fonction de signature*

***trouver\_simplicial** : (int list array \* bool array -> int*

*telle que l'appel à **trouver\_simplicial** (aretes, sg) renvoie, s'il existe, un sommet simplicial du sous-graphe induit décrit par (aretes, sg). Déterminer la complexité de la fonction **trouver\_simplicial**.*

**Question IV.D.3.** *Ecrire une fonction de signature*

***ordre\_parfait** : int list array -> int list*

*telle que l'appel à **ordre\_parfait** aretes renvoie un ordre d'élimination parfait du graphe décrit par aretes, s'il en existe un. Déterminer la complexité de la fonction **ordre\_parfait**.*

## IV.E Coupures minimales dans un graphe cordal

Etant donné un graphe  $G$  on appelle *coupure* de  $G$  tout ensemble  $C \subseteq S$  de sommets de  $G$ , de cardinal au moins égal à 2, tel que certains sommets reliés par un chemin dans le graphe  $G$  ne le sont plus dans le sous-graphe  $H$  induit par  $S \setminus C$ .

On se donne dans cette question un graphe cordal  $G = (S, A)$ . Soit  $C$  une coupure de  $G$  de cardinal minimal (supérieur ou égal à 2). Soit  $H$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $S \setminus C$ . Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $G$  déconnectés par la coupure, et soient  $G_1$  et  $G_2$  les composantes connexes de  $a$  et  $b$  dans le graphe  $H$ . Soient enfin  $x$  et  $y$  deux sommets distincts de la coupure  $C$ .

**Question IV.E.1.** *Montrer que  $x$  est voisin dans le graphe  $G$  d'un sommet de  $G_1$  et d'un sommet de  $G_2$ , et de même pour  $y$ .*

**Question IV.E.2.** *Montrer qu'il existe un chemin  $P_1 = (x, a_1, \dots, a_p, y)$  dont tous les sommets hormis  $x$  et  $y$  sont des sommets de  $G_1$  et un chemin  $P_2 = (y, b_1, \dots, b_q, x)$  dont tous les sommets hormis  $x$  et  $y$  sont des sommets de  $G_2$ .*

**Question IV.E.3.** *On prend deux tels chemins  $P_1$  et  $P_2$  de longueur minimale. En considérant un cycle formé à partir des chemins  $P_1$  et  $P_2$ , montrer que  $x$  et  $y$  sont reliés dans le graphe  $G$ .*

**Question IV.E.4.** *Montrer que  $C$  est une clique du graphe  $G$ .*

## IV.F Sommets simpliciaux dans un graphe cordal

On se propose de montrer que tout graphe cordal  $G$  possède la propriété suivante, que l'on appellera la propriété  $\mathcal{P}(G)$  :  $G$  possède un sommet simplicial, et même deux sommets simpliciaux non voisins si  $G$  n'est pas complet.

On se donne dans toute la question un graphe cordal  $G$ .

**Question IV.F.1.** *Montrer que si  $G$  est complet alors tous ses sommets sont simpliciaux.*

**Question IV.F.2.** *Montrer que la propriété  $\mathcal{P}(G)$  est vérifiée si  $G$  possède 1, 2 ou 3 sommets.*

**Question IV.F.3.** *On suppose dans cette question que  $G$  n'est pas complet, possède au moins trois sommets et que la propriété  $\mathcal{P}(G')$  est vérifiée pour tous les graphes cordaux  $G'$  ayant strictement moins de sommets que  $G$ . Soit  $C$  une coupure de  $G$  de cardinal minimal. Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $G$  déconnectés par la coupure  $C$ , et  $G_1$  et  $G_2$  les composantes connexes de  $a$  et  $b$  dans le sous-graphe de  $G$  induit par  $S \setminus C$ . Soit  $S_1$  (resp :  $S_2$ ) l'ensemble des sommets de  $G_1$  (resp :  $G_2$ ). Soit enfin  $H_1$  (resp :  $H_2$ ) le sous-graphe de  $G$  induit par  $S_1 \cup C$  (resp  $S_2 \cup C$ ).*

- a) *Justifier que le graphe  $H_1$  est cordal.*
- b) *On suppose que  $H_1$  est complet. Montrer que  $S_1$  contient un sommet simplicial du graphe  $H_1$ . Prouver que ce sommet est en fait un sommet simplicial de  $G$ .*
- c) *On suppose que  $H_1$  n'est pas complet. Montrer que  $S_1 \cup C$  contient deux sommets simpliciaux non voisins du graphe  $H_1$ . Montrer que au moins l'un de ces deux sommets est dans  $S_1$  et que ce sommet est un sommet simplicial de  $G$ .*
- d) *Montrer que la propriété  $\mathcal{P}(G)$  est vérifiée.*

## IV.G Ordre d'élimination parfait dans un graphe cordal

**Question IV.G.1.** *Montrer que tout graphe cordal possède un ordre d'élimination parfait.*