Correction du TD

I Fréquence, longueur d'onde et indice

1) On définit $\lambda_{r,0} = 800\,\text{nm}$ et $\lambda_{b,0} = 400\,\text{nm}$ les longueurs d'ondes dans le vide correspondant au extrémités bleue et rouge du spectre de la lumière visible.

On sait que

$$f = \frac{c}{\lambda_0}$$

On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= \frac{c}{\lambda_{b,0}} \\ f_r &= \frac{c}{\lambda_{r,0}} \end{aligned}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} c = 3{,}00 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \lambda_{b,0} = 400\,\text{nm} = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\text{m} \\ \lambda_{r,0} = 800\,\text{nm} = 8{,}00 \times 10^{-7}\,\text{m} \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= 7{,}50 \times 10^{14}\,\text{Hz} = 750\,\text{THz} \\ f_r &= 3{,}80 \times 10^{14}\,\text{Hz} = 380\,\text{THz} \end{aligned}}$$

2) Dans un milieu TLHI, la longueur d'onde change de valeur selon

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Ainsi,

a – dans l'eau d'indice $n_1 = 1{,}33$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 300\,\text{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 602\,\text{nm} \end{aligned}}$$

b – dans un verre d'indice $n_2 = 1{,}5$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 267\,\text{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 533\,\text{nm} \end{aligned}}$$

Leur couleur ne change cependant pas puisque **la couleur d'une lumière est définie par sa fréquence/longueur d'onde dans le vide**.

3) Dans un milieu TLHI, la vitesse de la lumière se calcule avec

$$v = \frac{c}{n}$$

Avec $n = 1{,}5$, on a donc

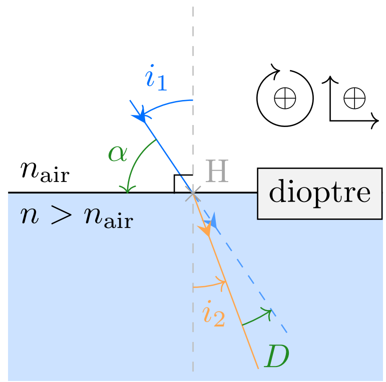
$$\boxed{v = 2{,}00 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

II Détermination directe de l'indice d'un liquide

1) Cet exercice est d'une simplicité absolue. Et pourtant…

Données

1) Rayon incident sur un dioptre entre air et milieu d'indice n : angle avec le dioptre de 56° ;
2) Différence d'angle entre rayon incident et réfléchi (« déviation ») de 13,5°.



Résultat attendu

Indice du liquide.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

avec n_1 l'indice du milieu d'incidence, n_2 celui du milieu de réfraction, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.

Application

Un bon schéma fait attentivement est **nécessaire** ici. En effet, les angles donnés ne sont pas ceux qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes.

En appelant α l'angle entre le rayon et le dioptre, on a

$$\alpha + i_1 = 90°$$

donc $\boxed{i_1 = 34°}$. Et en appelant D la déviation entre les deux rayons, on a

$$i_1 = i_2 + D$$

soit $\boxed{i_2 = 20{,}5°}$. On en déduit donc

$$\boxed{n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_1 = 34° \\ i_2 = 20{,}5° \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{n = 1.6}$$

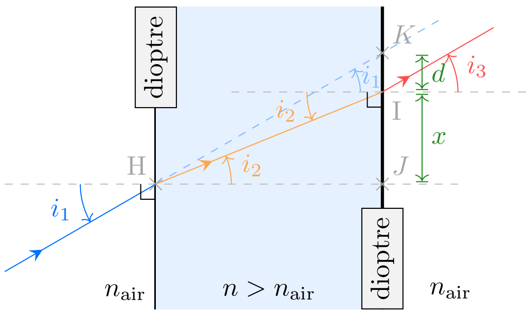
III Incidence de Brewster

1) Les rayons réfléchis et réfractés sont perpendiculaires si $r + i = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\pi}{2} - i$. En venant de l'air, on a $\sin i = n \sin r$, soit $\sin i = n \cos i$; autrement dit

$$\boxed{\tan i = n}$$

IV Rayon lumineux à travers une vitre

Schéma

1) 

Résultat attendu

Le rayon passe deux dioptres de l'air au verre, puis du verre à l'air. On utilise SNELL-DESCARTES pour déterminer la direction du rayon émergent et la comparer à celle du rayon incident.

Outils

Loi de SNELL-DESCARTES :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Application

En H : $\sin i_1 = n \sin i_2$

$\Leftrightarrow i_2 = \arcsin(\sin(i_1)/n) = 28°$;

Dedans : i_2 aux deux dioptres ;

En I : $\sin i_3 = n \sin i_2$;

D'où : $\cancel{n_1} \sin i_3 = \cancel{n_1} \sin i_1$

Ainsi,

$\boxed{i_3 = i_1}$

(retour inverse)

2) Comme les dioptres sont parallèles, leurs normales le sont aussi. Ainsi, les rayons émergent et incident sont parallèles.

3) $\tan(i_2) = \dfrac{\text{IJ}}{\text{HJ}} = \dfrac{x}{a}$ et $\tan(i_1) = \dfrac{x+d}{a}$, d'où $\dfrac{d}{a} = \tan(i_1) - \dfrac{x}{a} = \tan(i_1) - \tan(i_2)$, soit

$$\boxed{d = a(\tan(i_1) - \tan(i_2))} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 5{,}0\,\text{mm} \\ i_1 = 45° \\ i_2 = 28° \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{d = 2{,}3\,\text{mm}}$$

V Détecteur de pluie sur un pare-brise

1) Pour savoir si le pinceau lumineux revient intégralement, il faut savoir s'il y a réflexion totale à l'interface verre→air. Pour cela, on utilise la formule de l'angle limite de réfraction

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ici, on a

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{air}} = 1{,}00 \\ n_{\text{verre}} = 1{,}5 \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = 41{,}8°}$$

Comme $i = 60°$, $i > i_{\text{limv}\to\text{a}}$, et on a donc réflexion totale : aucun rayon ne sera réfracté.

Avec la figure ci-après, on a $\tan(i) = \frac{rmED}{2e}$, soit

$$\boxed{\text{ED} = 2e\tan(i)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = 5{,}00\,\text{mm} \\ i = 60° \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{ED = 1{,}7\,\text{cm}}$$

2) Dans le cas où une fine couche d'eau recouvre le verre, on doit calculer le nouvel angle limite de réfraction pour l'interface verre→eau. Comme précédemment, on utilise la formule et on trouve

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{e}} = 62{,}5°} \tag{2.1}$$

Cette fois, l'angle d'incidence $i < i_{\text{lim,v}\to\text{e}}$. On va donc avoir réfraction. On détermine l'angle de réfraction i_2 avec la loi de SNELL-DESCARTES pour la réfraction : $n_2 \sin(i_2) = n_1 \sin(i_1)$. Dans notre cas, $n_2 = n_{\text{eau}}$, $n_1 = n_{\text{verre}}$ et $i_1 = i$; on aura donc

$$\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_{\text{verre}}\sin(i)}{n_{\text{eau}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{verre}} = 1{,}5 \\ i = 60° \\ n_{\text{eau}} = 1{,}33 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{i_2 = 77{,}6°}$$

Ce rayon réfracté (en vert sur la figure) va ensuite rencontrer le dioptre eau→air en J, pour lequel l'angle limite de réfraction est

$$\boxed{i_{\text{lim,e}\to\text{a}} = 48{,}8°}$$

Comme $i_2 > i_{\text{lim,e}\to\text{a}}$, on a une nouvelle réflexion totale avec $r' = -i_2$, ramenant le pinceau vers le dioptre eau→verre en un point K. Dans cette situation comme la valeur absolue de r' est la même que celle de i_2, le principe du retour inverse de la lumière nous permet de déterminer directement que l'angle de réfraction de l'eau vers le verre i_3 a la même valeur absolue que l'angle d'incidence du verre vers l'eau i_1.

Avec le schéma ci-après, on peut déterminer que DL = IK (l'abscisse supplémentaire du trajet dans l'eau) et utiliser la trigonométrie pour trouver

$$\boxed{\text{IK} = 2e'\tan(i_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e' = 1{,}00\,\text{mm} \\ i_2 = 77{,}6° \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\text{DL} = 0{,}9\,\text{cm}}$$

Ainsi, le rayon ne tombe plus sur le détecteur mais à côté ; un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuie-glaces.