Correction du TD

I Fibre optique à saut d'indice

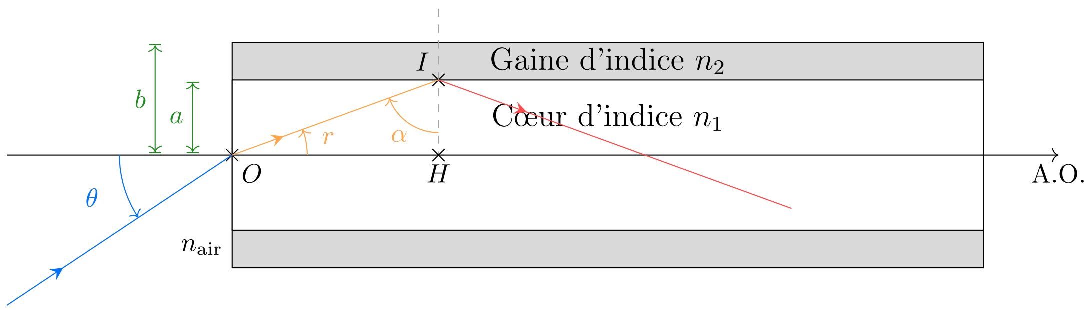


Figure 2.1 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

1) En O : $\sin(\theta) = n_1 \sin(r) \Leftrightarrow \boxed{\sin(r) = \dfrac{\sin(\theta)}{n_1}}$;

OIH : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$;

En I : On veut $\sin(\alpha) \geq \dfrac{n_2}{n_1}$;

$\alpha \to r$: $\sin(\alpha) = \sin(\pi/2 - r) = \cos(r)$

$$\boxed{\sin(\alpha) \geq \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \cos(r) \geq \frac{n_2}{n_1}}$$

$\cos(r) \to \sin(r)$: $\cos^2(r) = 1 - \sin^2(r)$;

$r \to \theta$: $\sin^2(r) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{{n_1}^2}$;

Combinaison : ${n_1}^2 - \sin^2(\theta) \geq {n_2}^2$;

Conclusion : $\boxed{\theta \leq \arcsin\left(\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}\right)}$

C'est ce qu'on appelle le **cône d'acceptance**.

2) Soit L la longueur de la fibre optique. Un rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable, compris entre 0 et θ_{lim}.

Le rayon le plus rapide parcourt la distance L à la vitesse c/n_1, soit

$$\boxed{T_1 = \frac{n_1 L}{c}}$$

Le rayon le plus lent arrive avec l'incidence θ_{lim}. Il parcourt l'hypoténuse du triangle, soit $L/\sin(\alpha_{\text{lim}})$, au lieu de parcourir L. Ainsi,

$$T_2 = \frac{n_1 L}{c \sin(\alpha_{\text{lim}})}$$

Or, d'après la question 1, $\sin(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{n_2}{n_1}$. Ainsi,

$$\boxed{T_2 = \frac{{n_1}^2 L}{c n_2}}$$

L'écart de temps à la réception est $\Delta T = T_1 - T_2$, soit

$$\boxed{\Delta T = \frac{n_1 L}{c}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

C'est ce qu'on appelle la **dispersion intermodale**.

3) Les impulsions en entrée vont être étalées de la durée ΔT. En les supposant très courtes, il faudra quand même ΔT pour pouvoir les séparer, donc le débit sera inférieur à $1/\Delta T$. Pour $L = 100\,\text{km}$, $n_1 = 1{,}500$ et $n_2 = 1{,}498$, on obtient $\Delta T \approx 1\,\mu\text{s}$, soit un débit maximal de $1\,\text{Mb/s}$, ce qui est bien inférieur à ce que proposent les fournisseurs d'accès à internet. Ainsi, en pratique on n'utilise pas de fibre optique à saut d'indice pour cette raison.

II Mirages

1) a – À chaque interface, $n_k \sin(i_k) = n_{k-1}\sin(i_{k-1})$; notamment, avec $k = 2$, on a $n_2 \sin(i_2) = n_1 \sin(i_1)$. Ainsi, tous les $n_k \sin(i_k)$ sont égaux.

b – Voir figure ci-après.

À chaque « dioptre », on a $\sin(i_{\text{lim,k}}) = \frac{n_{k-1}}{n_k}$. Sa valeur maximale est à $k = 2$: $\sin(i_{\text{lim},2}) = \frac{n_1}{n_2}$. Comme $n_k \sin(i_k)$ est constant et que n_k diminue, on sait que i_k augmente : ainsi, si l'angle d'incidence i_N est suffisamment grand, il y aura un i_k supérieur à $i_{\text{lim},2}$ et donc réflexion totale.

c –

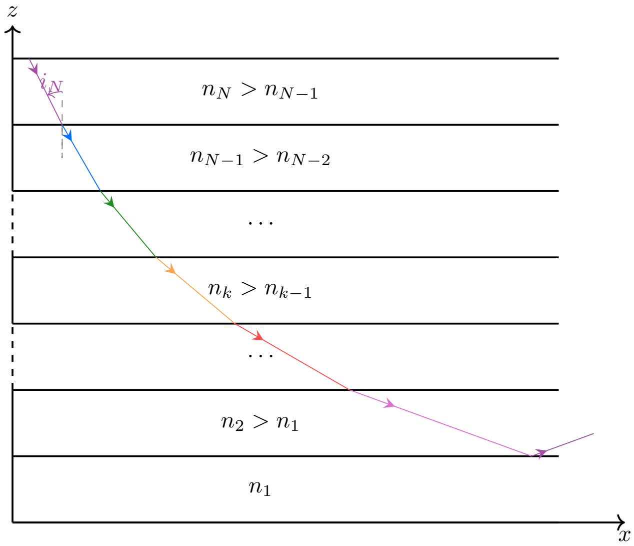


Figure 2.2 – Rayons d'un mirage chaud. La trajectoire est courbée perpendiculairement vers le haut.

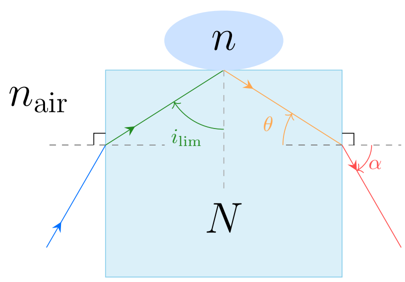
d – Alors qu'on devrait voir le sable, les rayons venant du haut des collines sont déviés vers le haut : on a l'impression de voir à travers la dune.

2) Cette fois ce sont les rayons dirigés vers le haut d'un objet lointain qui sont déviés vers le bas : on a l'impression de voir des objets au-dessus du niveau de la mer. Schéma non fourni.

III Réfractomètre de Pulrich

1) $\sin(i_{\text{lim,N}\to\text{n}}) = \dfrac{n}{N}$ d'une part. D'autre part, $N\sin(\theta) = \sin\alpha$, mais on a aussi $\theta = \pi/2 - i_{\text{lim}}$: on a donc $\sin\theta = \cos i_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{N}\right)^2}$.

Ainsi, $\sin^2\alpha = N^2\left(1 - \dfrac{n^2}{N^2}\right)$; autrement dit,



$$\boxed{n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N = 1{,}622 \\ \alpha = 60° \end{cases}$$

2) Application numérique :

$$\boxed{n = 1{,}376}$$

☆☆ IV Réfraction et dispersion

1) La lumière blanche est constituée d'une superposition de longueurs d'onde dans le vide entre [400 ; 800] nm. Quand ce faisceau arrive sur le dioptre et passe dans le milieu, l'indice de réfraction, qu'on utilise dans la relation de SNELL-DESCARTES, change selon la longueur d'onde dans le vide. Pour une même valeur de i incident on aura donc deux valeurs extrêmes de r réfracté, que l'on nomme r_b et r_r pour « bleu » et « rouge », selon :

$$\boxed{\begin{aligned} n_{\text{air}} \sin(i) &= n_b \sin(r_b) \\ n_{\text{air}} \sin(i) &= n_r \sin(r_r) \end{aligned}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} r_b &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}} \sin(i)}{n_b}\right) \\ r_r &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}} \sin(i)}{n_r}\right) \end{aligned}}$$

Comme $\lambda_{0,b} < \lambda_{0,r}$, $\underbrace{n(\lambda_{0,b})}_{n_b} > \underbrace{n(\lambda_{0,r})}_{n_r}$ et forcément $r_b < r_r$. On calcule :

$$\boxed{\begin{aligned} n_b &= 1{,}53 \\ n_r &= 1{,}51 \end{aligned}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} r_b &= 24{,}8° \\ r_r &= 25{,}2° \end{aligned}}$$

L'écart angulaire est donc

$$\boxed{\theta = r_r - r_b = 0{,}35°}$$

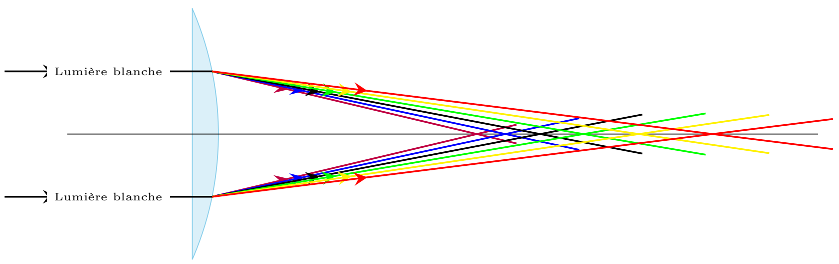


FIGURE 2.3 – Exemple (exagéré) de dispersion (aberration chromatique).