

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

PARTIE 1 : MODÉLISATION ET GÉOMETRIE DES MÉCANISMES

TRAVAUX DIRIGÉS

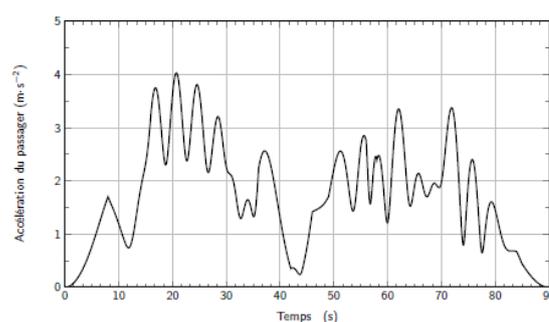
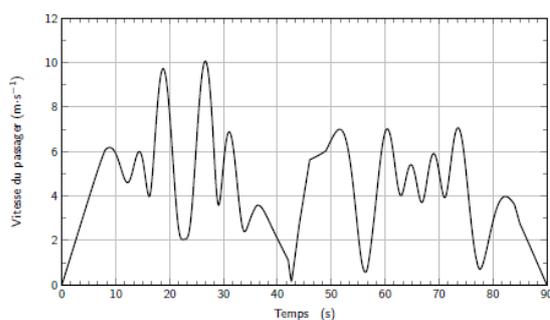
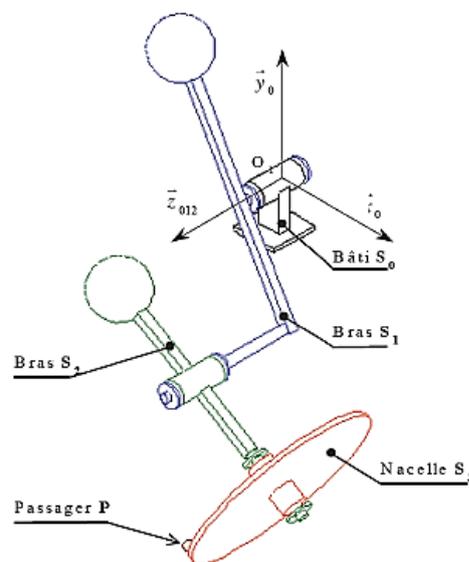
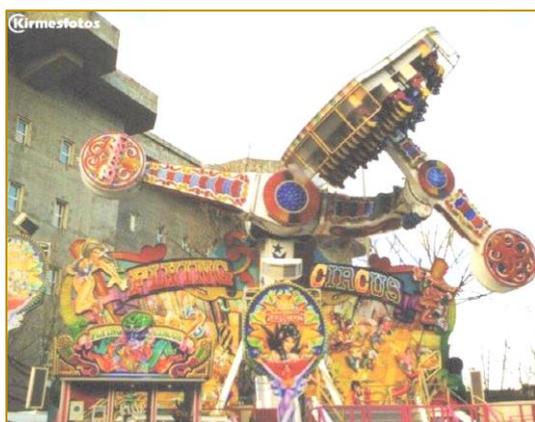
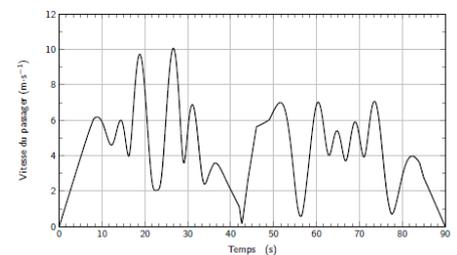
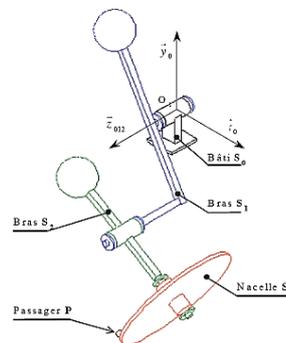


Table des matières

1. APPROPRIATION DU SCHÉMA CINÉMATIQUE ET DES LIAISONS.....	2
2. MODÉLISATIONS CINÉMATIQUES SIMPLES	2
2.1. Tête de fraiseuse Huron.....	3
2.2. Pompe à pistons axiaux.....	3
3. LOI ENTRÉE SORTIE DU JOINT DE TRANSMISSION DE CARDAN.....	3
4. LOI ENTRÉE SORTIE DE LA BARRIÈRE SYMPACT	6
5. LOI ENTRÉE SORTIE DU BRAS DE ROBOT MAXPID	7
6. POMPE A DIALISE : LOI E-S GEOMETRIQUE.....	9
7. PINCE DE SOUDAGE.....	10

Illustration 1^{ère} de couverture

L'attraction foraine « Magic Arms » permet de procurer de fortes sensations à un public averti. Son modèle cinématique suivi d'une étude analytique, puis numérique permet de tracer les vitesses et accélérations subies par le passager (courbes), puis de quantifier/vérifier le niveau de sensations ressenties.



1. APPROPRIATION DU SCHÉMA CINÉMATIQUE ET DES LIAISONS

Q1. Coloriez tous les schémas cinématiques que vous trouverez en feuilletant les pages de la présente liasse de TD.

Q2. Réalisez les graphes des liaisons...

... ceci est un bon entraînement !

2. MODÉLISATIONS CINÉMATIQUES SIMPLES

Objectif : réaliser le schéma cinématique d'un mécanisme simple.

Pour les deux systèmes suivant, répondre aux questions :

Q1. Mettre en place les points et les vecteurs de base nécessaires pour pouvoir définir les différentes liaisons.

Q2. Faire le graphe de structure.

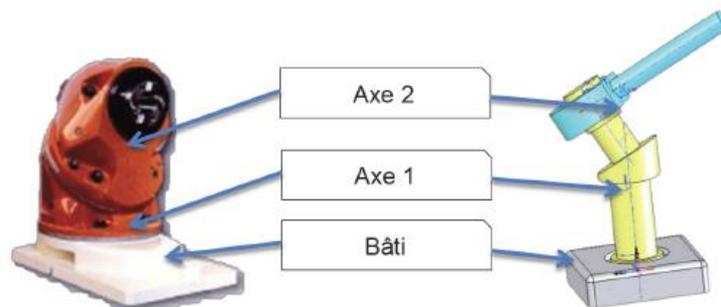
Q3. Faire le schéma cinématique.

Q4. Paramétrer le mécanisme.

2.1. Tête de fraiseuse Huron

Une fraiseuse est une machine-outil réalisant les opérations de fraisage. Dans le cas du fraisage, contrairement au tournage, c'est l'outil coupant monté dans la broche qui tourne. La pièce est fixe par rapport à la table d'usinage par l'intermédiaire d'un étau ou d'un montage d'usinage. La tête de fraiseuse Huron permet de faire des surfaçages inclinés, permettant notamment la réalisation aisée de tous les chanfreins.

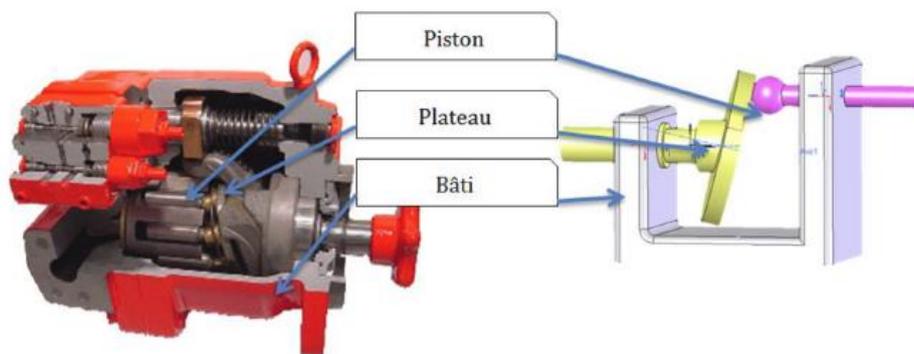
On donne ci-dessous une illustration simplifiée de la cinématique liant les trois classes d'équivalence. Les deux liaisons sont des pivots.



2.2. Pompe à pistons axiaux

Les pompes à pistons axiaux sont constituées d'un bâti (ou carter), d'un barillet et de pistons. Les pistons (pièces rigides de section circulaire couissant dans un cylindre) sont situés parallèlement à l'axe de rotation de l'ensemble. Un plateau inclinable permet de régler la course des pistons donc le débit de fluide expulsé. Ces pompes sont utilisées pour de multiples applications dans les domaines de l'agriculture, l'industrie, la sidérurgie, l'aéronautique, les travaux publics, etc.

On donne ci-après une illustration cinématique de la pompe, montrant les classes d'équivalence.



3. LOI ENTRÉE SORTIE DU JOINT DE TRANSMISSION DE CARDAN

Le joint de Cardan fait partie des composants technologiques appelés accouplement. Il permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres sécants mais non coaxiaux. Une des applications est l'automobile. Il transmet la puissance du moteur aux roues avant motrices devant pivoter lors de la rotation du volant.

Le schéma cinématique spatial est donné ci-dessous.

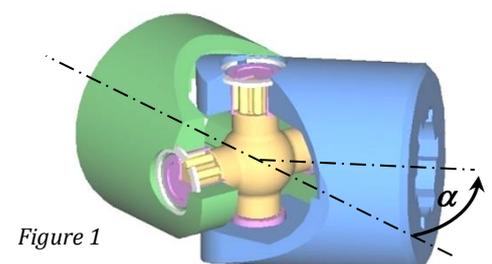
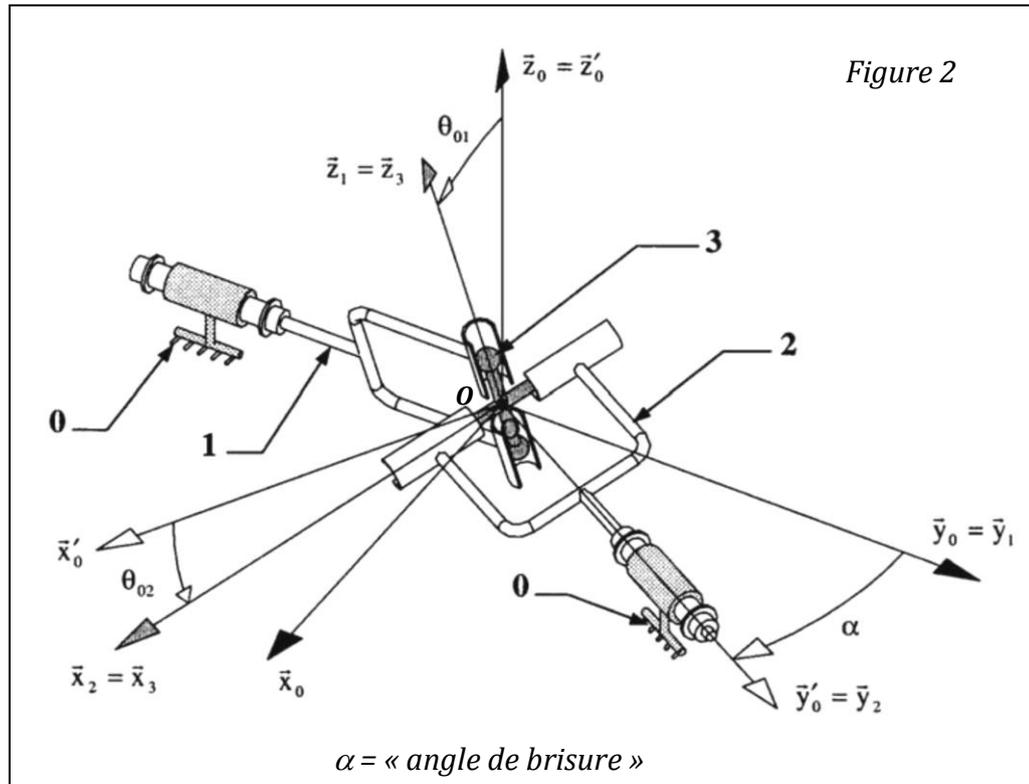


Figure 1



Paramètres

Un joint de Cardan est constitué de quatre groupes cinématiques (figure 2).

- Bâti 0 : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Arbre d'entrée 1, $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation d'axe (O, \vec{y}_0) avec le bâti 0.
 $\theta_{01} = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \text{angle d'entrée.}$
- Arbre de sortie 2, $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en rotation d'axe (O, \vec{y}_0') avec le bâti 0.
 $\theta_{02} = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = (\vec{x}_0', \vec{x}_2) = \text{angle de sortie.}$

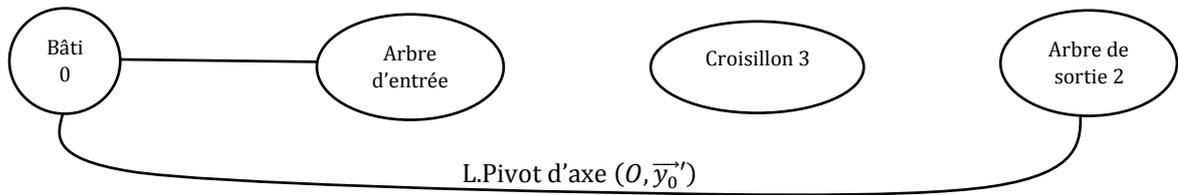
\vec{x}_0' appartient à un deuxième repère lié au bâti $R_0'(O, \vec{x}_0', \vec{y}_0', \vec{z}_0')$ obtenu par rotation d'angle α du repère R_0 autour de (O, \vec{z}_0) . $(\vec{y}_0, \vec{y}_0') = (\vec{x}_0, \vec{x}_0') = \alpha = \text{angle de brisure constant.}$

Les arbres 1 et 2 ont des axes concourants en O.

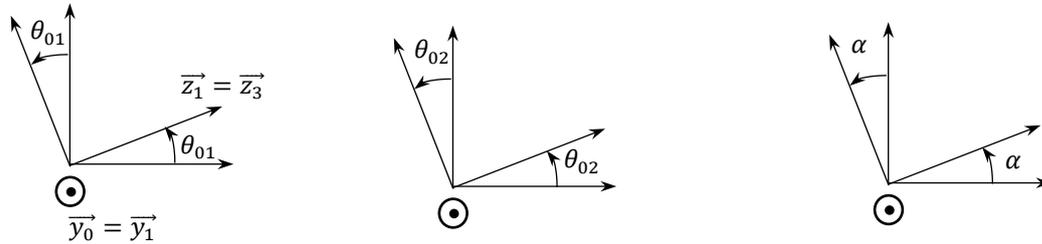
- Le croisillon 3, $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec 1, et en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_2) avec 2. Par construction, les axes du croisillon (O, \vec{x}_3) et (O, \vec{z}_3) sont orthogonaux.

Objectif : établir la loi entrée-sortie géométrique du joint de Cardan $\theta_{02} = f(\theta_{01})$, puis la loi entrée sortie cinématique (vitesses) $\omega_{02} = g(\omega_{01})$.

Q1. Faire le graphe de structure du joint de Cardan (se reporter à la figure 2 et à la description des paramètres).



Q2. Complétez les figures géométrales faisant apparaître les trois angles : θ_{01} , α , θ_{02} .



LOI ENTRÉE SORTIE GÉOMÉTRIQUE

Q3. Exprimer le vecteur \vec{z}_1 dans le repère R_0 . Exprimer le vecteur \vec{x}_2 dans le repère R_0' .

Q4. Exprimer mathématiquement que les axes du croisillon (3) sont orthogonaux. Etablir la loi entrée sortie géométrique du mécanisme : $\theta_{02} = f(\theta_{01})$.

Q5. Quand l'arbre d'entrée a balayé un angle de 45° , de quel angle a tourné l'arbre de sortie (on prendra un angle de brisure $\alpha = 30^\circ$).

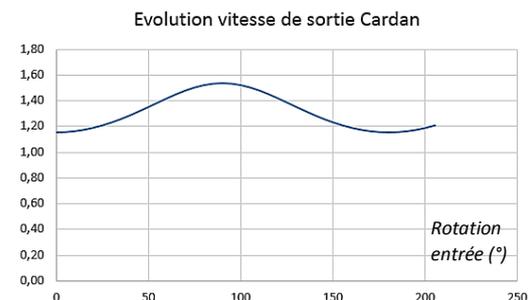
LOI ENTRÉE SORTIE CINÉMATIQUE

Q6. Loi entrée sortie-cinématique : dériver par rapport au temps la loi entrée sortie géométrique et déduire la vitesse angulaire $\omega_{02} = f(\omega_{01})$.

On rappelle : $\frac{d[f(u)]}{dt} = \frac{df(u)}{du} \times \frac{du}{dt}$. Par exemple : $\frac{d[\sin(x)]}{dt} = \frac{d[\sin(x)]}{dx} \times \frac{dx}{dt}$.

Q7. On parle d'une transmission « homocinétique » quand le rapport des vitesses sortie/entrée est constant. La transmission par joint de Cardan est-elle homocinétique ?

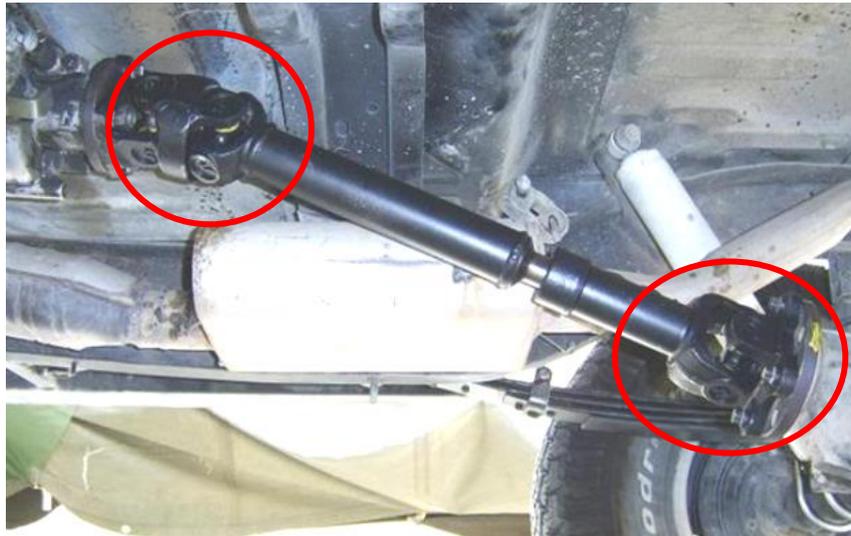
Q8. Sachant que le maximum de vitesse de sortie est obtenu pour un angle $\theta_{01} = 90^\circ$, calculer la vitesse angulaire maximale de sortie ω_{02_max} . On prendra une vitesse $\omega_{01} = 1000 \text{ tr/min}$.



CONCLUSION

Q8. Dans le cas de la transmission de mouvement pour une roue motrice d'automobile, quel problème majeur pose cette transmission ?

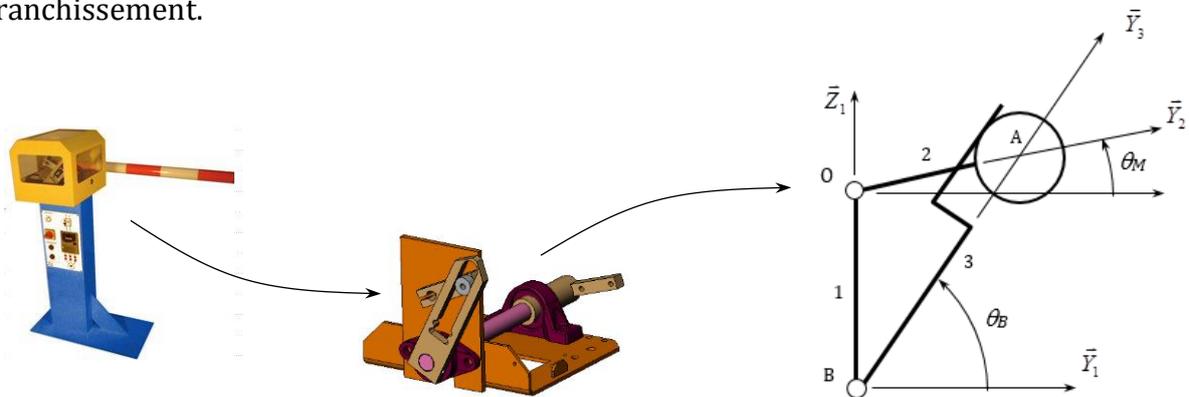
Q9. Proposez un moyen technologique constructif pour remédier à cet inconvénient (une idée : on pourrait utiliser un deuxième joint de Cardan par exemple...).



4. LOI ENTRÉE SORTIE DE LA BARRIÈRE SYMPACT

Objectif : établir la loi entrée-sortie de la barrière Sympact, $\theta_{Bielle} = f(\theta_{Manivelle})$.

La barrière Sympact permet d'interdire ou d'autoriser le passage d'un véhicule à une zone délimitée grâce à une lisse qui descend et monte, empêchant/autorisant ainsi le franchissement.



Trois classes d'équivalence permettent d'expliquer la transmission de mouvement entre le moteur et la lisse :

Bâti 1, Manivelle 2 (lié à l'arbre moteur), Bielle 3 (liée à la lisse).

Paramétrage

Entrée : rotation de la manivelle 2 Sortie : rotation de la bielle 3

$$\vec{BO} = H \cdot \vec{Z}_1 \quad \vec{OA} = R \cdot \vec{Y}_2 \quad \vec{BA} = x \cdot \vec{Y}_3$$

$$\text{On pose } \lambda = \frac{H}{R} \quad R=80 \text{ mm} \quad H=110 \text{ mm}$$

DETERMINATION DE LA LOI E-S GEOMETRIQUE

Q1. Faire le graphe des liaisons et les figures géométrales.

Q2. Réaliser la fermeture géométrique vectorielle. L'exprimer en fonction des vecteurs de base et des paramètres littéraux disponibles.

Q3. Projeter cette égalité sur chaque axe du repère fixe : déduire deux équations scalaires. Faites le bilan nb d'équations, nb d'inconnues. Quelle est l'inconnue indésirable ?

Q4. Déterminer la loi entrée sortie géométrique.

ANALYSE

Q5. Tracez le graphique $\theta_B = f(\theta_M)$.

Q6. La loi e-s est-elle : linéaire, non linéaire, quasiment linéaire, linéarisable sur un intervalle donné ?

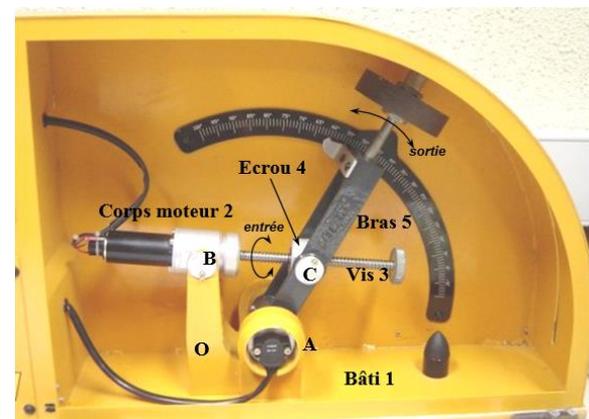
Q7. Proposer éventuellement une linéarisation de la loi sous forme d'une fonction affine de θ_B en fonction de θ_M en précisant l'intervalle de validité.

Q7. Déduire un rapport de vitesse constant approximé et pratique : $k = \frac{\dot{\theta}_B}{\dot{\theta}_M}$.

5. LOI ENTRÉE SORTIE DU BRAS DE ROBOT MAXPID

Le bras de robot Maxpid équipe nombre de laboratoires de SII en CPGE. C'est la maquette didactique d'un bras de robot ayant de multiples applications industrielles.

Les différentes études possibles sur Maxpid (cinématique, statique, asservissements) nécessitent la connaissance de la relation entre le mouvement de sortie (angle du bras 5/bâti 1) et le mouvement d'entrée (angle de la vis 3/corps moteur 2).



Description du fonctionnement

La vis 3 est entraînée en rotation par le moteur. La rotation de 3 en pivot dans le corps moteur 2 (angle β) provoque la translation de l'écrou 4 par rapport à 2 selon l'axe (B, \vec{x}_2) . 4, en liaison pivot avec le bras 5, embarque 5 en le faisant pivoter autour de l'axe (A, \vec{z}_1) . La rotation de la vis d'un angle β provoque donc la rotation du bras d'un angle θ . L'objectif est de déterminer la loi $\theta = f(\beta)$.

Objectif : déterminer la loi entrée sortie géométrique du bras de robot Maxpid

Données géométriques

$$\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{x}_1; \quad \overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{y}_1; \quad \overrightarrow{BC} = x \cdot \vec{x}_2; \\ \overrightarrow{AC} = c \cdot \vec{x}_3$$

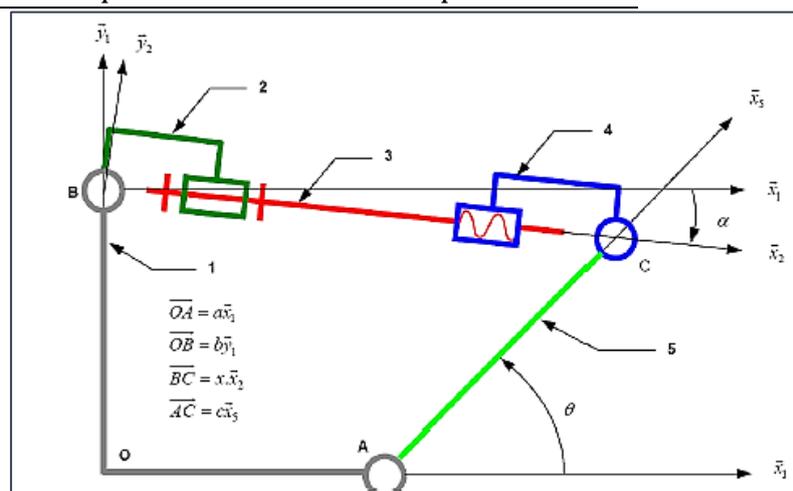
$$b=80 \text{ mm} \quad a=65 \text{ mm} \quad c=80 \text{ mm}$$

Pas du système vis/écrou : $p = 4 \text{ mm}$ à droite $\Rightarrow \Delta x = + \frac{p}{2\pi} \cdot \Delta\beta$

(pas p en mm/tr, $\Delta\beta$ en rad).

Q0. Appropriation du mécanisme

a) Colorier le schéma cinématique.



- b) Faire le graphe des liaisons et les figures planes de changement de base.
 c) Lors d'une rotation positive ($+\vec{x}_2$) de la vis 3 dans le corps moteur 2, quel est le sens de rotation du bras 5 : $+\vec{z}_1$ ou $-\vec{z}_1$?

CALCUL PRÉLIMINAIRE : $\theta = f(x)$

Q1. Effectuer la fermeture géométrique du mécanisme : écrire la relation vectorielle incluant les vecteurs de base et paramètres du système.

Q2. Projeter la relation vectorielle obtenue dans la base fixe écrire les deux relations scalaires.

Q3. Exprimez x^2 en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

Q4. Dédurre la loi $\theta = f(x)$. On définit l'angle φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
 Voir l'aide en fin d'exercice pour résoudre l'équation du type : $A \cdot \cos x + B \cdot \sin x = C$.

CALCUL FINAL DE LA LOI E-S : $\theta = f(\beta)$

Q5. Calculez la distance $x = X_{90}$ quand le bras 5 est vertical.

Q6. Calculez x en fonction de β et du pas de la liaison hélicoïdale. L'angle β est posé nul quand le bras est vertical. Attention : β en radians.

Q7. Dédurrez la loi $\theta = f(\beta)$.

ANALYSE DE LA LOI ENTRÉE SORTIE GÉOMÉTRIQUE

Q8. Tracez cette loi (Excel, Python, ou à la main). Est-elle linéaire, non linéaire, quasiment linéaire, linéarisable ?

Q9. Proposer éventuellement une linéarisation de la loi sous forme d'une fonction affine de θ en fonction de β , en précisant l'intervalle de validité.

Q10. Dédurre un rapport de vitesses constant approximé et pratique : $k = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\beta}}$

Aide : résolution de l'équation à une inconnue $A \cdot \cos x + B \cdot \sin x = C$; $(A, B) \neq (0, 0)$.

Condition d'existence des solutions : $C^2 \leq A^2 + B^2$. Sinon $S = \emptyset$.

Méthode

On divise les deux membres de l'équation par la quantité $\sqrt{A^2 + B^2}$. Ceci est possible car $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$

$$A \cdot \cos x + B \cdot \sin x = C \Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Comme $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$ on peut définir l'angle φ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} ; \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{B}{A}$$

L'équation devient :

$$\Leftrightarrow \cos \varphi \cdot \cos x + \sin \varphi \cdot \sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Comme $-1 < \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1$ (voir condition d'existence des solutions) :

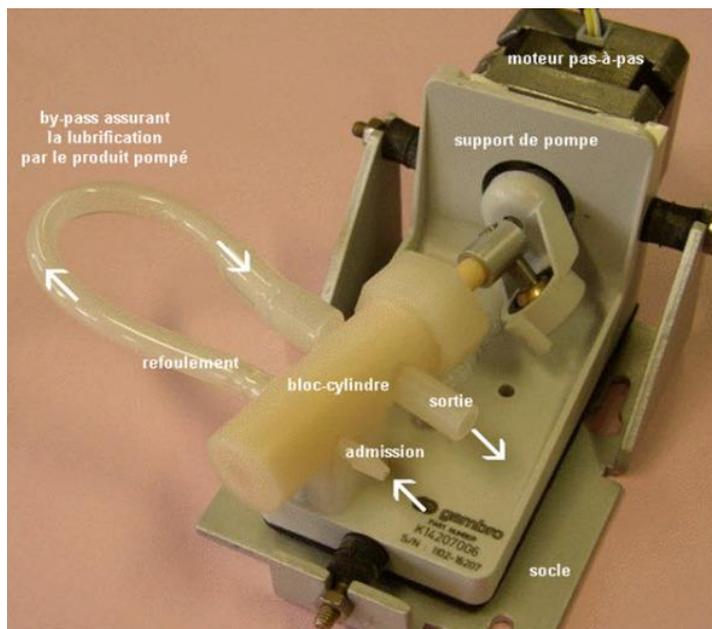
$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + \varphi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

6. POMPE A DIALISE : LOI E-S GEOMETRIQUE

Les personnes souffrant d'insuffisance rénale doivent subir régulièrement des traitements de purification du sang par hémodialyse. L'hémodialyse est un traitement extracorporel du sang à l'aide d'un rein artificiel. Ce rein artificiel nécessite la préparation et la circulation d'un liquide de dialyse. . .

La pompe présentée sur la photo ci-dessous est un des modèles utilisés, développée par la société Innovacera, elle doit assurer par mélange de composants un dialysat aux caractéristiques chimiques bien précises. . .

La rotation de 2 selon l'axe (A, \vec{z}_1) , assurée par un moteur « pas à pas », est transformée en un mouvement de translation alterné d'un piston 3 à l'intérieur d'un « bloc cylindre » selon la direction \vec{v}_1 . Cette transformation de mouvement est l'objet de l'étude qui suit.



Vue d'ensemble

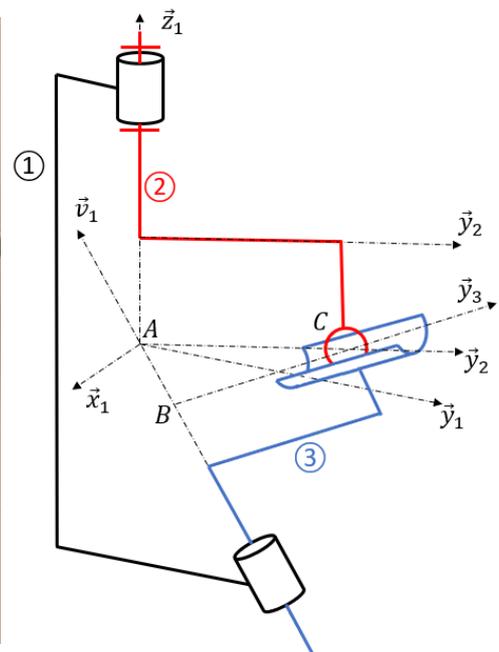


Schéma cinématique

Paramétrage

- **Bati 1** repère associé $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On définit également dans le plan $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la droite (A, \vec{v}_1) orientée par l'angle constant $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{u}_1) = (\vec{z}_1, \vec{v}_1)$
- **Arbre moteur 2** repère associé $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$, avec $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On définit le point C par $\overline{AC} = r \cdot \vec{y}_2$
- **Piston 3** associé au repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{v}_1)$, avec $\theta_{31} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{u}_1, \vec{y}_3)$. La position du point B est repérée par $\overline{AB} = \lambda \vec{v}_1$ et on pose $\overline{BC} = \mu \vec{y}_3$

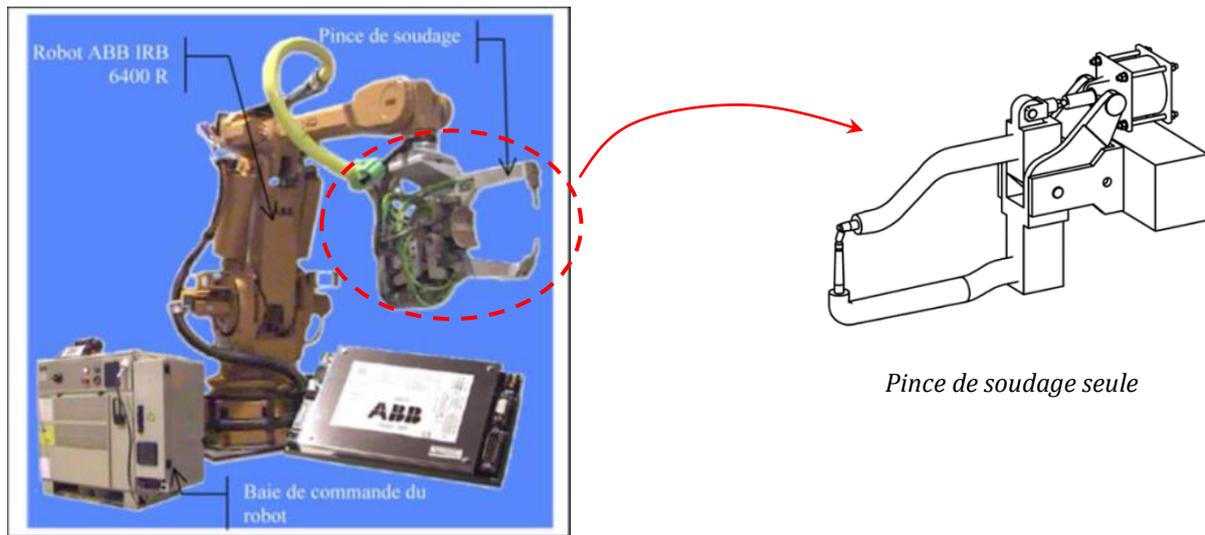
Questionnaire

- Q1.** Dessinez le graphe des liaisons.
Q2. Dessinez les figures de changement de bases utiles.
Q3. Déterminer la relation donnant λ (position du piston par rapport au bâti) en fonction de γ , r et θ_{21} (position angulaire du moteur).

7. PINCE DE SOUDAGE

Mise en situation

L'étude porte sur une application de soudage robotisé par points, pour les carrosseries de véhicules automobiles.



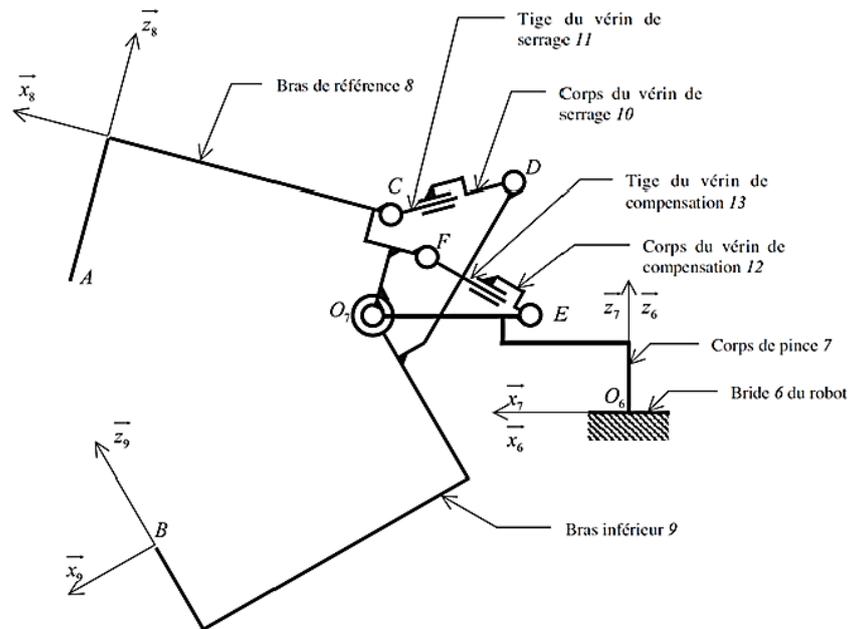
Robot de soudage équipé de sa pince

Cette opération utilise un robot 6 axes ABB IRB équipé d'une pince de soudage à actionneur pneumatique. Vous disposez du schéma cinématique permettant de comprendre le fonctionnement global décrit ci-dessous.

La pince de soudage est équipée d'un vérin principal de « serrage » (solides 10 et 11) permettant la fermeture des deux bras 8 et 9 de la pince et le serrage des 2 tôles pour leur soudage.

Pendant cette phase de serrage, l'ensemble des deux bras de la pince, serrés sur les tôles, doit être « flottant » par rapport au corps de pince. Cette fonction est réalisée par un deuxième vérin pneumatique de « compensation » (solides 12 et 13) dont les pressions d'alimentation des deux chambres permettent d'équilibrer le poids des parties mobiles de la pince.

À l'inverse, pendant les phases de déplacement entre deux points à souder, les bras doivent être immobiles par rapport au corps de la pince. Une seule chambre du vérin de « compensation » est alors alimentée pour permettre la rentrée de sa tige et réaliser cette fonction.



Paramétrage des solides :

- bride du robot, 6 : $\mathcal{R}_6(O_6, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$
- corps de la pince de soudage, 7 : $\mathcal{R}_7(O_6, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$ avec $\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_7$
 - $\vec{O_6O_7} = a \vec{x}_7 + b \vec{z}_7$ avec $a = 232,5$ mm et $b = 160$ mm
 - $\vec{O_7E} = c \vec{x}_7$ avec $c = -125$ mm
- bras de référence, 8 : $\mathcal{R}_8(O_7, \vec{x}_8, \vec{y}_8, \vec{z}_8)$ avec
 - $\vec{O_7A} = d \vec{x}_8 + e \vec{z}_8$ avec $d = 500$ mm et $e = -40$ mm
 - $\vec{O_7C} = f \vec{x}_8 + h \vec{z}_8$ avec $f = 40$ mm et $h = 200$ mm
 - $\vec{O_7F} = i \vec{x}_8 + j \vec{z}_8$ avec $i = -55$ mm et $j = 70$ mm
- bras inférieur, 9 : $\mathcal{R}_9(O_7, \vec{x}_9, \vec{y}_9, \vec{z}_9)$ avec
 - $\vec{O_7B} = k \vec{x}_9 + l \vec{z}_9$ avec $k = 500$ mm et $l = 140$ mm
 - $\vec{O_7D} = m \vec{x}_9 + n \vec{z}_9$ avec $m = -150$ mm et $n = 200$ mm

Paramétrage des liaisons : $\theta_{78} = (\vec{x}_7, \vec{x}_8)$, $\theta_{78} \leq 0$, $\theta_{79} = (\vec{x}_7, \vec{x}_9)$, $\theta_{79} \geq 0$.

APPROPRIATION DU MÉCANISME

Q1. Coloriez le schéma cinématique.

Sur le schéma cinématique vous distinguez les deux vérins :

- Vérin de serrage : {10,11} en L.pivot en C, D
- Vérin de compensation : {12,13} en L.pivot en E et F.

Q2. Vérin de serrage bloqué, si la tige 13 du vérin de compensation sort, comment le mécanisme évolue-t-il (mouvements, sens) ?

Vérin de compensation bloqué, si la tige 11 du vérin de serrage sort, comment le mécanisme évolue-t-il (mouvements, sens) ?

OUVERTURE DES BRAS DE LA PINCE

On impose une ouverture de la pince de 150mm, soit $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{z}_7 = q = 150 \text{ mm}$. On souhaite calculer la course du vérin de serrage satisfaisant cette condition. Pour ce calcul, on supposera que le bras de référence 8, est fixe par rapport au corps 7, pendant la phase d'ouverture de la pince avec $\theta_{78} = 0$.

Lorsque la pince est fermée, les points A et B sont confondus, donc $\theta_{79} = 0$.

Q3. Déterminer l'équation permettant de déterminer θ_{79} quand la pince est ouverte (l'équation n'est pas à résoudre).

Pour la suite on prendra : $\theta_{79} = 24^\circ$, avec $\cos \theta_{79} = 0,9$ et $\sin \theta_{79} = 0$.

Q4. Calculer la course minimum admissible, C_v , du vérin de serrage.

Aide : on s'intéressera à la norme $\|\overrightarrow{CD}\|$.

Q5. Chaque bras de la pince de soudage comporte des électrodes interchangeables dont l'usure maximum tolérée au cours de la production est de 5 mm. Estimer, par un calcul rapide, l'augmentation de course du vérin, C_{vu} , que cette usure impose.