Correction du TD

I Système afocal

On considère l'association de trois lentilles $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ puis $\mathcal{L}_3$.
On note O_1, O_2 et O_3 leur centre optique, et, f'_1, f'_2 et f'_3 leur distance focale.
On suppose que $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = L$ et que $f'_1 = f'_3 = f'$.

1. À quelle condition sur f'_2, l'association des trois lentilles est-elle afocale ?

Réponse :

Le système est afocal ssi l'image A'_∞ d'un objet A_∞ à l'infini sur l'axe est également à l'infini sur l'axe.

$$A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_3} A'_\infty$$

En utilisant la méthode des images intermédiaires (et les propriétés des foyers)

$$A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_3 \xrightarrow{\mathcal{L}_3} A'_\infty$$

Il faut donc que $\boxed{F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_3}$

Or

$$\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -L + f'$$
$$\overline{O_2F_3} = \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_3} = L - f'$$

Deux situations sont possibles.

- $f' = L$, dans ce cas $F'_1 = O_2 = F_3$, le système est afocal quelque soit la valeur de f'_2.
- $f' \neq L$, dans ce cas $F'_1 \neq O_2$ et $F_3 \neq O_2$, on peut appliquer la formule de Descartes à $F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_3$:

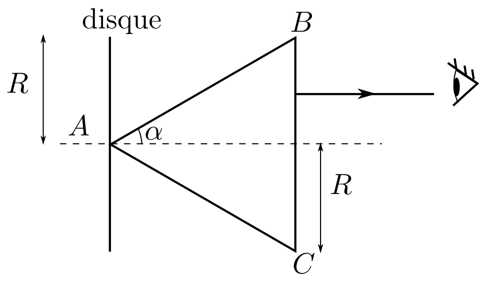
$$\frac{1}{\overline{O_2F_3}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$
$$\frac{1}{L-f'} - \frac{1}{-L+f'} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\boxed{f'_2 = \frac{L-f'}{2}}$$

Remarque : on reconnaît le montage "2f - 2f".

II Image à travers un cône

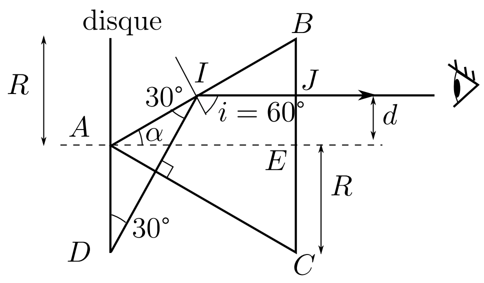
Soit un cône en verre d'indice optique $n = 1{,}5$, de demi-angle au sommet $\alpha = 30°$ et de rayon à la base R. Le cône est placé dans l'air.
Un observateur situé à l'infini observe des rayons parallèles entre eux et parallèles à l'axe du cône.



1. Tracer le rayon à l'intérieur du cône. Par quelle face le rayon est-il entré ?

Réponse :
L'angle en I vaut $i = 60°$, il n'est pas possible que le rayon soit rentré par la face AB car $n\sin(i) > 1$. Il y a donc réflexion totale sur la face (AB).

Le rayon arrive perpendiculairement à la face (AC).



2. On place un disque lumineux de rayon R, centré avec l'axe du cône. L'observateur est toujours placé à l'infini. Quel est le rayon du disque d vu par l'observateur à travers le cône.

Réponse :
Il faut que les rayons ressortent perpendiculairement à (BC), donc arrivent perpendiculairement à (AC) (ou à (AB)).

Le triangle ADI est isocèle en I, donc $AI = R$.

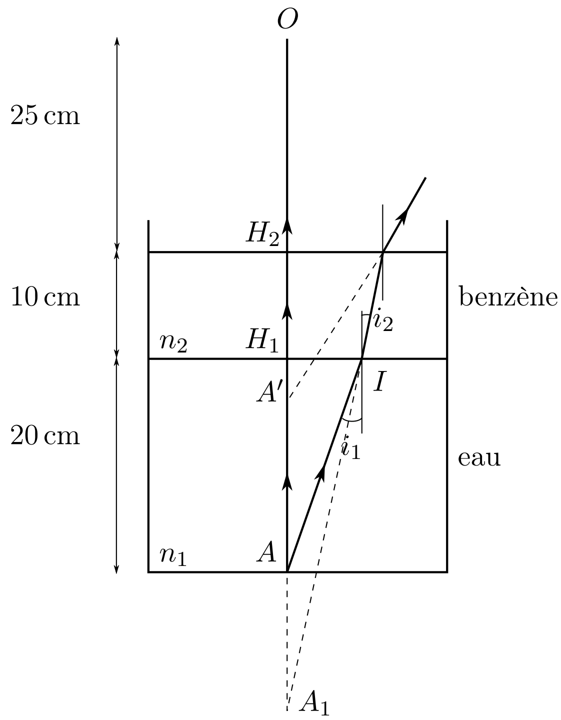
On applique Thalès dans les triangles semblables BAE et BIJ, et on obtient $\boxed{d = R/2}$.

III Image à travers deux dioptres plans

Une cuve contient une couche d'eau de 20 cm d'épaisseur et d'indice $n_1 = 1{,}33$ et une couche de benzène d'épaisseur 10 cm et d'indice $n_2 = 1{,}48$. On suppose les deux liquides non miscibles.
Un observateur dont l'œil est à 25 cm au-dessus de la surface libre du benzène regarde presque verticalement un petit objet A au fond de la cuve.
On rappelle que l'eau est plus dense que le benzène. On se placera dans les conditions de rayons faiblement inclinés par rapport à la normale aux deux dioptres.

1. Tracer la marche d'un pinceau lumineux issu de A.

Réponse :



2. A quelle distance l'objet A parait-il être de l'observateur ?

Réponse :
Soit A_1 l'image de A à travers le dioptre eau-benzène. On applique la relation de Snell-Descartes

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

En considérant les angles i_1 et i_2 faibles, on obtient $\boxed{n_1 i_1 \approx n_2 i_2}$.
Dans les triangles H_1IA et H_1IA', on exprime les tangentes

$$\tan(i_1) = \frac{H_1I}{H_1A} \approx i_1 \quad \text{et} \quad \tan(i_2) = \frac{H_1I}{H_1A_1} \approx i_2$$

On en déduit la relation de conjugaison du diopte plan

$$\boxed{\frac{\overline{H_1A_1}}{n_2} = \frac{\overline{H_1A}}{n_1}}$$

Ensuite A_1 est l'objet pour le dioptre benzène-air et donne l'image A'. La relation de conjugaison est

$$\boxed{\frac{\overline{H_2A_1}}{n_2} = \overline{H_2A'}}$$

On en déduit alors

$$\overline{H_2A'} = \frac{\overline{H_1A}}{n_1} - \frac{\overline{H_1H_2}}{n_2} = -22\,\text{cm}$$

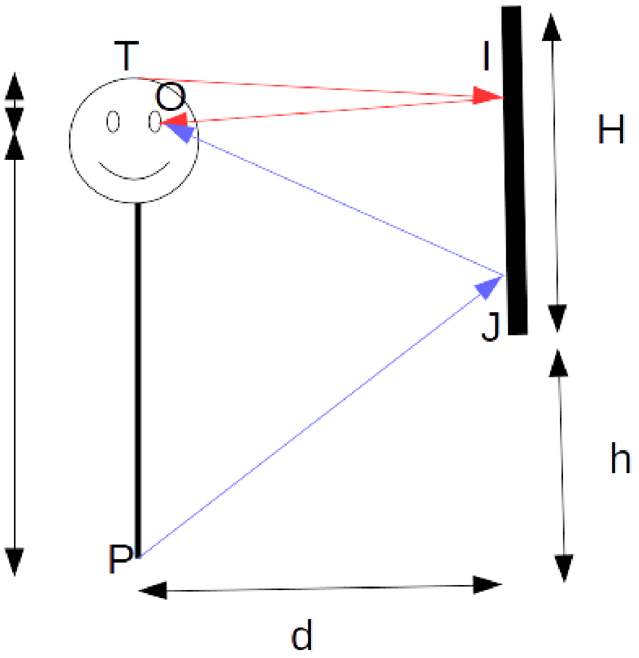
On en déduit que A' est à 47 cm de O

IV Hauteur d'un miroir

Une personne est située à $d = 1{,}00$ m d'un miroir plan. Elle mesure 1,80 m et la distance entre les yeux et le haut de son crâne vaut 10 cm. Le miroir a une hauteur H et son extrémité inférieure est située à une distance h du sol.

1. À quelles conditions sur h et H la personne peut-elle se voir entièrement ?

Réponse :
L'axe z étant orienté vers le haut et son origine est le sol.



On appelle T le sommet de la tête de la personne, O son œil et P son pied. Pour qu'elle puisse se voir entièrement, il faut qu'au moins un rayon lumineux en partance de T et un de P atteigne O. Au contact du miroir, les rayons lumineux sont réfléchis suivant les loi de Descartes donc les triangles TIO et OJP sont isocèles. Pour que la personne puisse se voir en entier dans le miroir, il faut donc que :

$$h + H \geq z_I = \frac{z_T - z_O}{2} = 175\,\text{cm} \qquad ; \qquad h \leq z_J = \frac{z_O - z_P}{2} = 75\,\text{cm}.$$

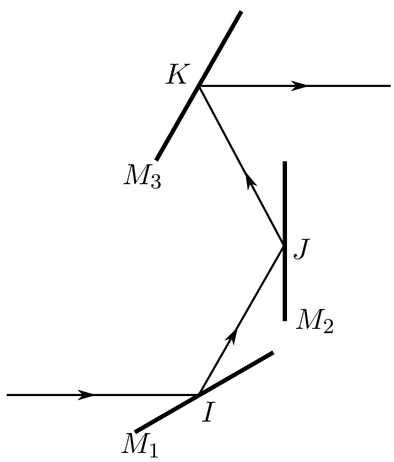
2. Si la personne recule, a-t-elle plus de chances de se voir ?

Réponse :
Les conditions ne dépendent pas de d : cela ne change rien si elle recule ou non.

V Déviation par trois miroirs ($\star$)

Un rayon lumineux se propageant dans l'air est réfléchi par trois miroirs M_1, M_2 et M_3. Ces miroirs sont perpendiculaires à un plan choisi comme plan de la figure.
On note I, J, K les points d'incidence du rayon lumineux sur les miroirs M_1, M_2 et M_3. On sait que les angles d'incidence sur les miroirs M_1 et M_2 valent tout deux 60°.

On souhaite déterminer l'orientation du miroir M_3 pour que, après les trois réflexions, le rayon réfléchi définitif ait la même direction et le même sens que le rayon incident.

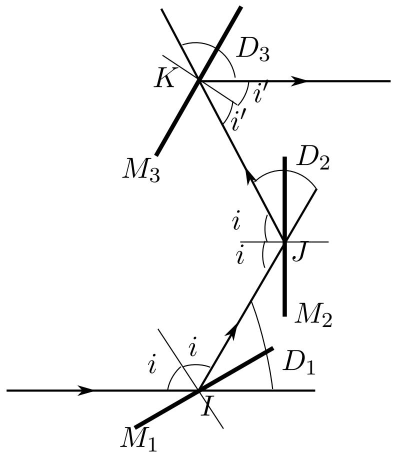


On rappelle que la déviation d'un rayon est l'angle partant rayon incident, s'il avait continué sans rencontrer d'obstacle et le rayon transmi ou réfléchi.

1. Refaire le schéma et placer les différents angles d'incidence, ainsi que les déviations successives D_1, D_2 et D_3 subies par le rayon lumineux sur chaque miroir.

   On notera i l'angle d'incidence au niveau des miroirs M_1 et M_2 et i' l'angle d'incidence au niveau du miroir M_3. Les angles i et i' sont des angles géométriques, donc positifs. Les déviations D_1, D_2 et D_3 sont définies dans l'intervalle $]0,\pi[$.

   Réponse :



2. Exprimer la déviation totale D en fonction de i et i'.

   Réponse :
   On exprime chaque déviation :

$$D_1 = D_2 = \pi - 2i \quad \text{et} \quad D_3 = \pi - 2i'$$

   On en déduit la déviation D en faisant attention que la troisième réflexion entraine une rotation dans le sens horaire, donc

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 - D_3 \\ &= \pi - 4i + 2i' \end{aligned}$$

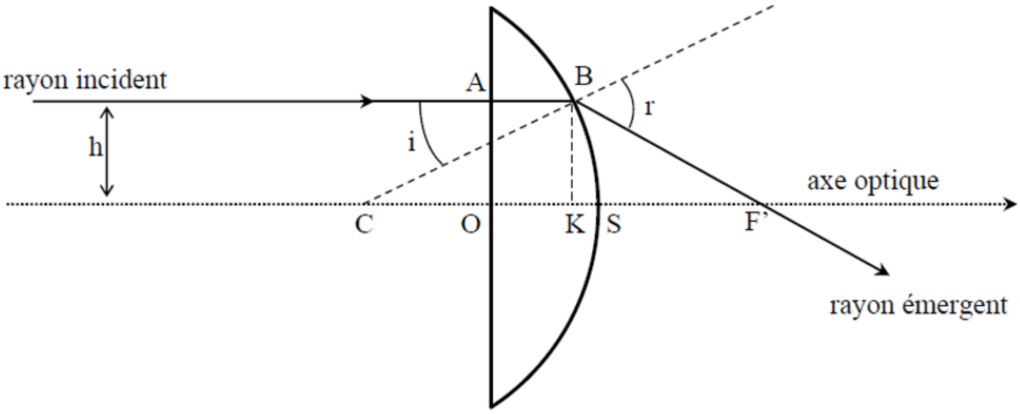
3. En déduire l'expression de i' pour que le rayon émergent ait même direction et même sens que le rayon incident. Donner sa valeur.

   Réponse :

   On veut que $D = 0$, on en déduit $\boxed{i' = 2i - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}}$

VI Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

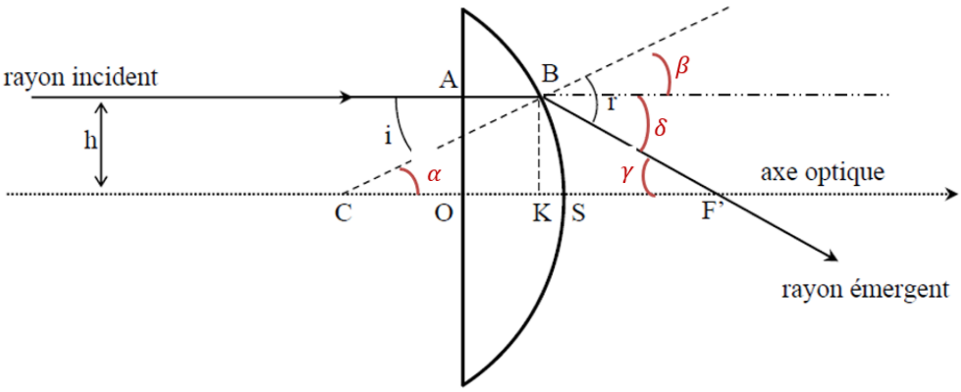
Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique. Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (voir figure ci-dessous) constituée d'un verre d'indice n. L'indice de l'air ambiant est égal à 1. La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = \overline{CB} = \overline{CS}$. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = \overline{OS}$. On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F'. On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.



1. Écrire les lois de la réfraction en B.

   Réponse :
   Loi de la réfraction de Snell-Descartes : $n \sin i = \sin r$, car l'indice de l'air est pris égal à 1.

2. Exprimer les différents angles α, β, δ et γ sur la figure ci-dessous, en fonction de i et r. Justifier.



Puis, montrer que la grandeur algébrique $\overline{OF'}$ peut se mettre sous la forme :

$$\overline{OF'} = e - R\,(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r-1)}$$

Réponse :

Relation entre les angles :

- $\alpha = i$ car ce sont des angles alternes-internes.
- $\beta = i$ car ce sont des angles opposés par le sommet.
- $\delta = r - i$ par construction.
- $\gamma = \delta = r - i$ car ce sont des angles alternes-internes.

On cherche à montrer que : $\overline{OF'} = e - R\,(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r-1)}$

• Dans le triangle rectangle (K, B, F') : $\tan \delta = \tan(r - i) = \frac{\overline{KB}}{\overline{KF'}}$;

• Dans le triangle rectangle (K, B, C) : $\sin \alpha = \sin i = \frac{\overline{KB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{KB}}{R}$ et $\cos i = \frac{\overline{CK}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CK}}{R}$.

Finalement, par relation de Chasles :

$$\overline{OF'} = \overline{OS} + \overline{SC} + \overline{CK} + \overline{KF'} = e - R + R\cos i + \frac{KB}{\tan(r-i)} = e - R + R\cos i + \frac{R \sin i}{\tan(r-i)}$$

3. Cette lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ? Justifier.

   Réponse :
   On voit que les rayons lumineux venant d'un point à l'infini sur l'axe optique et dont l'image est censée être le foyer image, croisent l'axe optique après la lentille en un point qui dépend de l'angle i, donc de la distance h à l'axe optique du rayon incident. La lentille n'est donc pas un système rigoureusement stigmatique. De toute façon, on a vu en cours que seul le miroir plan est rigoureusement stigmatique.

4. Si on considère maintenant des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique, on peut approximer à l'ordre 1, pour un angle θ faible, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta$ 1 et $\tan\theta \approx \theta$. Donner une expression approchée de la grandeur algébrique $\overline{OF'}$ en fonction de e , R et n uniquement. Peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier.

   Réponse :
   Avec les approximations proposées : $\overline{OF'} = e - R(1-\cos i) + \frac{R\sin i}{\tan(r-i)}$

   Soit : $\overline{OF'} \approx e - 0 + \frac{Ri}{r-i}$

   Il faut supprimer r et introduire n. La loi de Snell-Descartes devient alors $ni \approx r$

   Ainsi, on obtient

$$\overline{OF'} \approx e + \frac{Ri}{ni - i} \approx e + \frac{R}{n-1}$$

   $\overline{OF\prime}$ est maintenant indépendant de i et donc de h, **la lentille est approximativement stigmatique**.