

Circuits du 1^{er} ordre

📖 Sommaire

I Circuit RC	3
I/A Circuit RC série : charge	3
I/B Circuit RC série : décharge	8
I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles	10
II Bobine et circuit RL	11
II/A Circuit RL série : échelon montant	11
II/B Circuit RL série : décharge	14

⚡ Capacités exigibles

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. | <input type="checkbox"/> Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. |
| <input type="checkbox"/> Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. | <input type="checkbox"/> Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension |
| <input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique. | <input type="checkbox"/> Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. |

✓ L'essentiel

☰ Définitions

<input type="checkbox"/> E3.1 : Échelon de tension	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Circuit RC en charge	3
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse	5
<input type="checkbox"/> E3.4 : Circuit RC en décharge	8
<input type="checkbox"/> E3.5 : Circuit RC en charge	11
<input type="checkbox"/> E3.6 : Circuit RL descendant	14

⚡ Propriétés

<input type="checkbox"/> E3.1 : Équa. diff. RC montant	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Tension RC montant	5
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.4 : Intensité RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.5 : Bilan de puissances RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.6 : Bilan d'énergie RC montant	8
<input type="checkbox"/> E3.7 : Équa. diff. RC descendant	8
<input type="checkbox"/> E3.8 : Tension RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.9 : Temps de réponse RC descendant	10
<input type="checkbox"/> E3.10 : Intensité RC décharge	10
<input type="checkbox"/> E3.11 : Équa. diff. RL montant	11
<input type="checkbox"/> E3.12 : Intensité RL montant	12
<input type="checkbox"/> E3.13 : Temps de réponse RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.14 : Tension RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.15 : Bilan de puissances RL montant	14
<input type="checkbox"/> E3.16 : Équa. diff. RL descendant	14
<input type="checkbox"/> E3.17 : Intensité RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.18 : Temps de réponse RL descendant	16
<input type="checkbox"/> E3.19 : Tension RL descendant	16

» Implications

<input type="checkbox"/> E3.1 : Détermination τ RC montant	5
<input type="checkbox"/> E3.2 : Détermination τ RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.3 : Détermination τ RL montant	12
<input type="checkbox"/> E3.4 : Détermination τ RL descendant	15

☰ Démonstrations

<input type="checkbox"/> E3.1 : Équa. diff. RC montant	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Tension RC série montant	4
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.4 : Intensité RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.5 : Bilan de puissances RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.6 : Bilan d'énergie RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.7 : Équa. diff. RC descendant	8
<input type="checkbox"/> E3.8 : Tension RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.9 : Temps de réponse RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.10 : Intensité RC décharge	10
<input type="checkbox"/> E3.11 : Équa. diff. RL montant	11
<input type="checkbox"/> E3.12 : Intensité RL série montant	11
<input type="checkbox"/> E3.13 : Tension RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.14 : Bilan de puissances RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.15 : Équa. diff. RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.16 : Intensité RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.17 : Tension RL descendant	16

♥ Points importants

<input type="checkbox"/> E3.1 : Résolution equa. diff. ordre 1	4
<input type="checkbox"/> E3.2 : Bilan de puissance en élec.	7
<input type="checkbox"/> E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles	10

⚠ Erreurs communes

<input type="checkbox"/> E3.1 : Conditions initiales	10
<input type="checkbox"/> E3.2 : Bilan d'énergie RL charge	14

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

I Circuit RC

I/A Circuit RC série : charge

Définition E3.1 : Échelon de tension

Un échelon de tension est montant s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < 0) = 0 \\ u(t \geq 0) = E \end{cases}$$

et descendant si E avant et 0 après.

FIGURE 3.1

I/A) 1 Présentation

♥ Définition E3.2 : Circuit RC en charge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement déchargé.**
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

FIGURE 3.2

I/A) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

Avec la loi des mailles,

♥ Propriété E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

avec

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

Application E3.1 : Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Méthode 1

Méthode 2

I/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Important E3.1 : Résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = k$:

- 1 On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
- 2 On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
- 3 On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p(t) = \lambda$.
- 4 On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
- 5 On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

♥ Démonstration E3.2 : Tension RC série montant

- 1 L'équation homogène est :
- 2 La forme générale de la solution pour cette équation est :
- 3 Une solution particulière avec $u_{C,p}(t) = \lambda$ donne

4 La solution générale est donc

5 Les conditions initiales donnent ici

et

♥ Propriété E3.2 : Tension RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

et $u_C(t)$ est continue.

FIGURE 3.3

I/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Quand $t \rightarrow +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

♥ Implication E3.1 : Détermination τ RC montant

1)

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

FIGURE 3.4

♥ Définition E3.3 : Temps de réponse

Le **temps de réponse** d'un circuit d'ordre 1 est le temps à partir duquel on peut considérer la consigne de tension ou de courant atteinte, c'est-à-dire qu'on est en **régime permanent**.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint.

♥ Démonstration E3.3 : Temps de réponse RC montant

Dans ce cours, on prendra 99%. On cherche donc t_{99} tel que $u(t_{99}) = 0,99E$:

♥ Propriété E3.3 : Temps de réponse RC montant

Ainsi,

I/A) 5 Évolution de l'intensité

Qu'advient-il de l'intensité dans un circuit RC? On peut le déterminer de deux manières :

♥ Démonstration E3.4 : Intensité RC montant

Caractéristique de C

Loi des mailles

♥ Propriété E3.4 : Intensité RC montant

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

et est discontinue.

FIGURE 3.5

I/A) 6 Bilan de puissance

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit ; ainsi

♥ Important E3.2 : Bilan de puissance en élec.

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i .

♥ Démonstration E3.5 : Bilan de puissances RC montant

♥ Propriété E3.5 : Bilan de puissances RC montant

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\mathcal{P}_G = Ei :$$

$$\mathcal{P}_C = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} :$$

$$\mathcal{P}_J = Ri^2 :$$

I/A) 7 Bilan d'énergie

On peut étudier énergétiquement cette évolution en intégrant la puissance délivrée sur le temps d'utilisation.

♥ Démonstration E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

♥ Propriété E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Pendant la totalité de la charge, l'énergie du générateur est

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

I/B Circuit RC série : décharge

I/B) 1 Présentation

♥ Définition E3.4 : Circuit RC en décharge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement chargé :**
 $u_C(0^-) = E$.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

FIGURE 3.6

I/B) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Propriété E3.7 : Équation différentielle RC échelon descendant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

avec

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

♥ Démonstration E3.7 : Équation différentielle RC échelon descendant

Avec la loi des mailles,

I/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Propriété E3.8 : Tension RC descendant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est **continue**, et :

♥ Démonstration E3.8 : Tension RC descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

et on trouve K avec la condition initiale :

et

I/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Implication E3.2 : Détermination τ RC descendant

1)

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

FIGURE 3.7

♥ Démonstration E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0,01E$:

♥ Propriété E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Ainsi,

I/B) 5 Évolution de l'intensité

♥ Démonstration E3.10 : Intensité RC décharge

Caractéristique de C

Loi des mailles

♥ Propriété E3.10 : Intensité RC décharge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

et est discontinue.

FIGURE 3.8

♥ Attention E3.1 : Conditions initiales

Attention, lorsqu'on étudie un circuit charge-décharge, il faut **étudier les conditions initiales** en $t \neq 0$.

I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles

♥ Important E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles

- 1 Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, LdΩ, RCT...);
- 2 Écrire les lois des mailles;
- 3 Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres;
- 4 Mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = \frac{F}{\tau}$$

et identifier F et τ ;

- 5 Établir les conditions initiales avec l'énoncé et la continuité de la tension pour C ;
- 6 Résoudre l'équation différentielle.

II Bobine et circuit RL

II/A Circuit RL série : échelon montant

II/A)1 Présentation

♥ Définition E3.5 : Circuit RC en charge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéals.
- ◇ On suppose l'interrupteur initialement ouvert.
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

FIGURE 3.9

II/A)2 Équation différentielle du circuit

Démonstration E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

Avec la loi des mailles,

♥ Propriété E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

avec

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

II/A)3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Démonstration E3.12 : Intensité RL série montant

- 1 L'équation homogène est :

2) La forme générale de la solution pour cette équation est :

3) Une solution particulière avec $i_p(t) = \lambda$ donne

4) La solution générale est donc

5) Les conditions initiales donnent ici

et

♥ Propriété E3.12 : Intensité RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

et $i(t)$ est continue.

FIGURE 3.10

II/A) 4) Constante de temps, régime transitoire

♥ Implication E3.3 : Détermination τ RL montant

1)

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

FIGURE 3.11

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,99\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

Propriété E3.13 : Temps de réponse RL montant

Ainsi,

II/A) 5 Évolution de la tension

♥ Démonstration E3.13 : Tension RL montant

Caractéristique de L

Loi des mailles

♥ Propriété E3.14 : Tension RL montant

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

et est discontinue.

FIGURE 3.12

II/A) 6 Bilan de puissance

♥ Démonstration E3.14 : Bilan de puissances RL montant

♥ Propriété E3.15 : Bilan de puissances RL montant

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$$\mathcal{P}_G = Ei :$$

$$\mathcal{P}_L = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt} :$$

$$\mathcal{P}_J = Ri^2 :$$

♥ Attention E3.2 : Bilan d'énergie RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe Ri^2 . On ne peut intégrer à l'infini.

II/B Circuit RL série : décharge

II/B) 1 Présentation

♥ Définition E3.6 : Circuit RL descendant

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.
- ◇ On suppose le courant initialement établi : $i(0^-) = \frac{E}{R}$.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

FIGURE 3.13

II/B) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Propriété E3.16 : Équation différentielle RL échelon descendant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RL en décharge

avec

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

♥ Démonstration E3.15 : Équation différentielle RL échelon descendant

Avec la loi des mailles,

II/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Propriété E3.17 : Intensité RL descendant

L'intensité $i(t)$ d'un circuit RL en décharge avec $i(0) = \frac{E}{R}$ est **continue**, et :

♥ Démonstration E3.16 : Intensité RL descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

et on trouve K avec la condition initiale :

et

II/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

♥ Implication E3.4 : Détermination τ RL descendant

1)

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

La tangente à la courbe en 0, coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

FIGURE 3.14

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,01 \frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

🏹 **♥ Propriété E3.18 : Temps de réponse RL descendant**

Ainsi,

II/B) 5 Évolution de la tension

☸ **♥ Démonstration E3.17 : Tension RL descendant**

Caractéristique de L

Loi des mailles

🏹 **♥ Propriété E3.19 : Tension RL descendant**

La tension dans un circuit RL en décharge s'exprime par

et est discontinue.

FIGURE 3.15