Correction du TD d'entraînement

I Circuit RL – RC

1) **Maille 1**

$$\begin{aligned} Ri_1(t) + u_c &= E \\ \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_1 &= 0 \\ \Rightarrow i_1(t) &= A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot) \\ &\text{RCT pour C} \\ &\text{On résout} \end{aligned}$$

Maille 2

$$\begin{aligned} ri_2(t) + u_L &= E \\ \Rightarrow ri_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= E \\ \Rightarrow i_2(t) &= \frac{E}{r} + B\mathrm{e}^{-\frac{t}{r/L}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{RCT pour L} \\ &\text{On résout} \end{aligned}$$

On étudie les conditions initiales grâce à deux schémas :

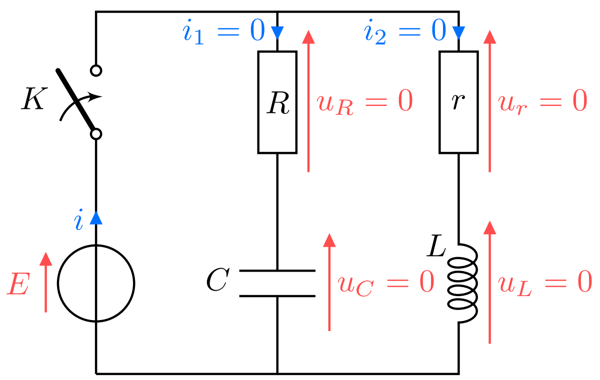


FIGURE 3.1 – Circuit à $\boxed{t = 0^-}$

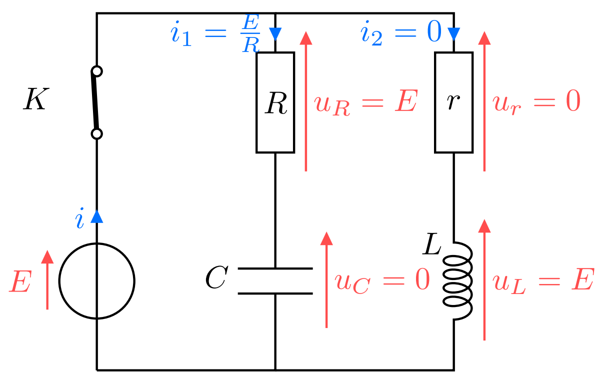


FIGURE 3.2 – Circuit à $\boxed{t = 0^+}$

Ainsi,

$$i_1(0^+) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i_2(0^+) = 0$$

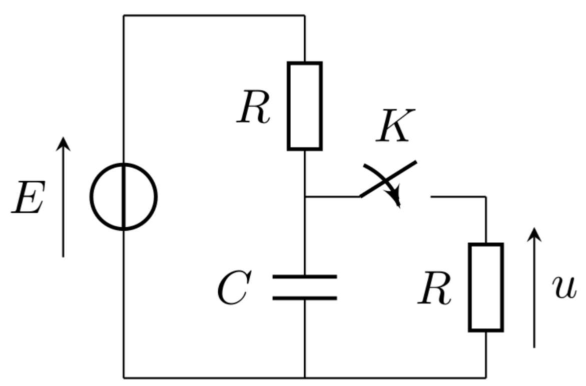
$$\Rightarrow A = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad B = -\frac{E}{r}$$

Soit finalement

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = \frac{E}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/r}}\right)}$$

II Circuit RC à 2 mailles

On considère le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur K est fermé à $t = 0$.



1) LdMailles :

$$Ri + u = E \quad \text{et} \quad u_C = u$$

LdN :

$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

D'où

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2u = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{2\tau}$$

avec $\tau = \frac{RC}{2}$.

Après résolution avec $u(0^+) = E$, on obtient

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}(1 + e^{-t/\tau})}$$

Ainsi, u_C décroit exponentiellement de E à $E/2$.

III Régime transitoire d'un circuit RC

1) ◇ Initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. De plus, la tension aux borne d'un condensateur est une grandeur continue, donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. On en déduit alors que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.

◇ Si on applique la loi d'Ohm aux 2 résistances (en série) et la loi des mailles à $t = 0^+$, on trouve directement : $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R + R_g}}$. On observe que l'**intensité n'est pas continue** dans ce circuit car $i(0^-) = 0$.

2) On applique la loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi des condensateurs dans le circuit pour des $t > 0$:

$$E = (R + R_g)i + u_c(t) \quad ; \quad i(t) = C\frac{du_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = (R + R_g)C\frac{du_c}{dt} + u_c(t)}$$

3) La constante de temps est :

$$\boxed{\tau = (R + R_g)C}$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée de charge ou de décharge du condensateur.

4) L'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La solution homogène $u_{c,h}(t)$ et la solution particulière $u_{c,p}$ sont :

$$u_{c,h}(t) = Ae^{-t/\tau} \quad ; \quad u_{c,p}(t) = E \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

Pour trouver la constante A, on utilise la condition initiale :

$$u_c(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

5)

$$u_c(t_1) = 0{,}9E \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau\ln(10) \approx 2{,}3\tau}$$

6) ◇ Sur la voie B, on mesure la tension $u_c(t)$. Cette fonction est continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (1).

◇ Sur la voie A, on mesure la tension $u_c(t) + Ri(t)$. Or la fonction $i(t)$ n'est pas continue en $t = 0$, donc il s'agit de la courbe (2).

7) On doit utiliser un **couplage DC** car on étudie un signal continu (et non sinusoïdal).

8) À l'instant $t = 0^+$, on a :

$$u_c(0^+) + Ri(0^+) = 0 + \frac{RE}{R + R_g}$$

La tension au point P est donc $\boxed{\dfrac{RE}{R + R_g}}$.

9) D'après la courbe, la tension en P est $4E/6$. ON en déduit que :

$$\frac{4E}{6} = \frac{RE}{R + R_g} \quad \Rightarrow \quad \frac{4(R + R_g)}{6} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_g = \frac{R}{2} = 50\,\Omega}$$

10) D'après la courbe expérimentale :

◇ $\boxed{E = 6\,\mathrm{V}}$;

◇ $t_1 = 0{,}42\,\mathrm{ms}$.

On en déduit que :

$$C = \frac{\tau}{R + R_g} = \frac{t_1}{\ln(10) \times (R + R_g)} = \boxed{1{,}2\,\mathrm{\mu F}}$$

11) La demi-période T du signal utilisé est supérieure à 8 carreaux, donc :

$$T > 2 \times 0{,}8 = 1{,}6\,\mathrm{ms}$$

On en déduit que

$$f = \frac{1}{T} < \frac{1}{1{,}6 \times 10^{-3}} = \boxed{625\,\mathrm{Hz}}.$$

12) Pour observer l'intensité du courant, on peut observer la tension aux bornes de la résistance R (qui est une image de i *via* la loi d'Ohm) en affichant $u_A - u_B$.