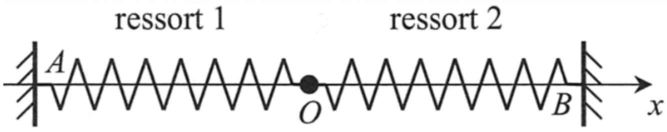
TD entraînement : oscillateurs harmonique et amorti

☆ I Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B. On le repère par sa position $\mathrm{OM} = x$.

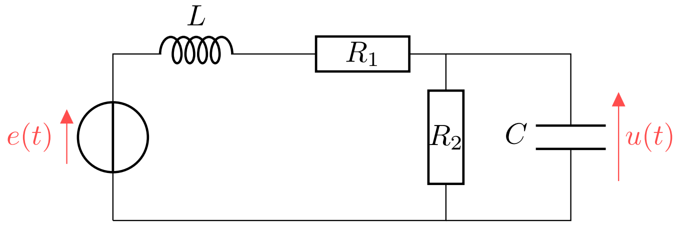


Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq} et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$

1) Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
   a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
   b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m.
   c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
2) En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).
   a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \dfrac{\alpha}{m}$.
   b) Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h.

☆ II Décrément logarithmique électrique

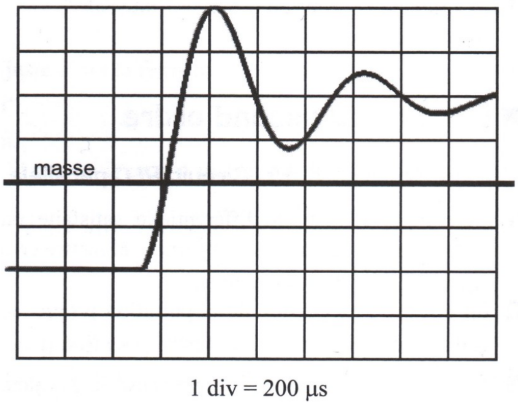
On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



1) Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

2) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3) On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre, avec $1\,\mathrm{V/div}$ de calibre vertical.



a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.

b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+nT)-u_\infty}\right)}$$

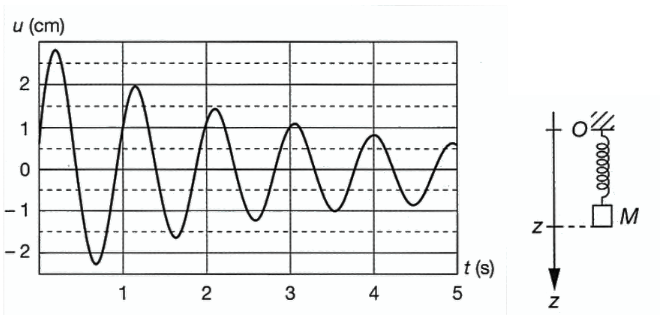
4) Exprimer $u(t)$ en fonction de u_∞, ω_0, λ et t (sans chercher à déterminer les constantes d'intégration).

5) Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

6) Sachant que $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 5\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

☆☆ III Décrément logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, fixé au point O. En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\mathrm{eq}}$ au court du temps.



1) Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.

2) Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

3) Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période T en fonction de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et de Q.

4) Montrer que le décrément logarithmique δ, défini par

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)-u_{\mathrm{eq}}}{u(t+nT)-u_{\mathrm{eq}}}\right)}$$

est indépendant du temps.

5) Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

6) Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q et la pseudo-pulsation ω.

7) En déduire les valeurs de m et α.