Électrocinétique – chapitre 4

Oscillateur harmonique

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ☐ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ☐ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ☐ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
- ☐ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ☐ Réaliser un bilan énergétique.

L'essentiel

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des systèmes qui présentent un régime transitoire caractérisé par des exponentielles croissantes ou décroissantes. En combinant deux de ces composants, on trouve alors des régimes transitoires caractérisé par une combinaison d'exponentielles, exprimée sous la forme de fonctions sinusoïdales. Regardons un exemple.

I Introduction

I/A Signal sinusoïdal

Définition E4.1 : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

$$\boxed{s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

A est l'*amplitude*, telle que

$$A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$

$\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ est la *phase instantanée* du signal, avec

ω la pulsation et φ_0 la phase initiale

La pulsation représente la **vitesse de variation de la phase**. Pour un tour de 2π rad, on a

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

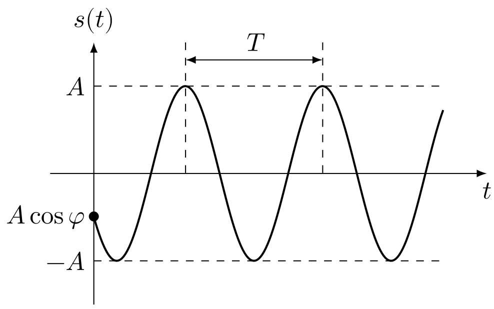

FIGURE 4.1

Unités

La phase s'exprime en **radians** ; la pulsation en **rad·s^{-1}**.

Interprétation E4.1 : Astuce de représentation

Par la nature de l'exponentielle, on peut plutôt représenter $s(t)$ à l'aide d'une exponentielle complexe :

$$\boxed{\underline{s}(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)}}$$

Pour retrouver la valeur réelle du signal, on en prend simplement la partie réelle.

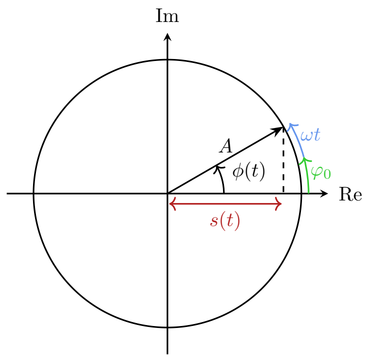

FIGURE 4.2

I/B Équation différentielle oscillateur harmonique

Propriété E4.1 : Équa° différentielle

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_{\mathrm{eq}}}$$

Avec x_{eq} la position d'équilibre du système et ω_0 la pulsation **propre**.

Propriété E4.2 : Solu° harmoniques

La forme générale des solutions d'un oscillateur harmonique s'écrit de manière équivalente

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A'\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + x_{\mathrm{eq}} \\ x(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\mathrm{eq}} \end{aligned}}$$

avec A', φ_0, A, B des *constantes d'intégration.*

I/C Changement de variable : de général à homogène

Au cours du chapitre précédent, nous avons vu la méthode pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Nous avons pu remarquer que les équations différentielles entre les échelons montants et descendants étaient en tout point similaire si ce n'est pour la présence ou non d'un second membre, impliquant la recherche d'une solution particulière ou non.

Le changement de variable permet **d'éviter de chercher une solution particulière constante**.

Propriété E4.3 : Changement de variable

Si $x(t)$ est solution de

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_{\text{eq}}}$$

alors $y(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ est solution de

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 y = 0}$$

Application E4.1 : Changement de variable

Résoudre l'équation du circuit RL montant par changement de variable.

L'équation différentielle totale s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i(t) = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i - \frac{E}{R}}{\tau} = 0$$

On peut donc définir

$$i_h(t) = i(t) - \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 0$$

donc i_h est solution de

$$\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{i_h}{\tau} = 0$$

de solution générale

$$i_h(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

On peut directement chercher l'expression de A par CI :

$$i_h(0) = \underbrace{i(0)}_{=0} - \frac{E}{R} = A$$

Et en ré-isolant $i(t)$, on trouve bien

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

I/D Exemple expérimental : l'oscillateur LC

Soit le circuit suivant sous un échelon de tension descendant. On observe la tension $u_C(t)$ avec un oscilloscope dont la courbe est représentée à droite. **Une simulation est disponible en ligne** [1].

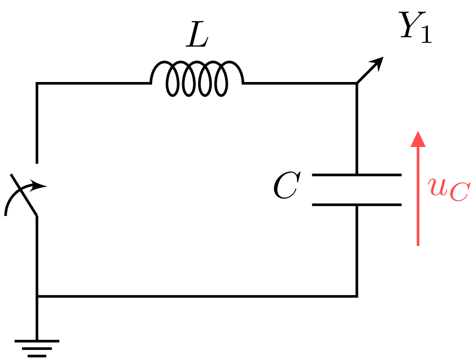

FIGURE 4.3

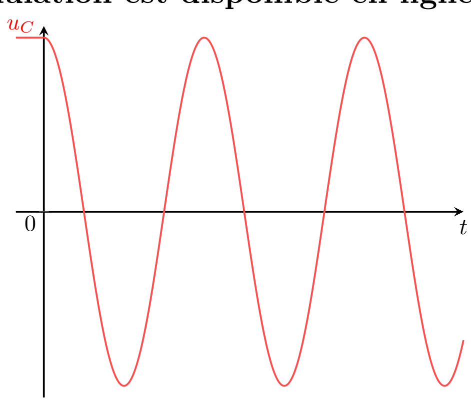

FIGURE 4.4

On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des d'oscillations sinusoïdales amorties.

1. https://tinyurl.com/yl9rvpqg

En fonction des valeurs des caractéristiques des composants, on trouve :

- Pour $C_1 = 80\,\mathrm{nF}$ et $L_1 = 43\,\mathrm{mH}$, un période de $T_1 = 364\,\mathrm{\mu s}$;
- Pour $C_2 = 20\,\mathrm{nF}$ et $L_2 = 43\,\mathrm{mH}$, un période de $T_2 = 184\,\mathrm{\mu s}$;

Analyse

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur **oscille** de façon **régulière et sinusoïdale**, avec une **fréquence** qui ne **dépend pas de l'amplitude** de l'excitation mais **dépend** des caractéristiques de l'oscillateur (**capacité** du condensateur et **inductance** de la bobine).

II Circuit LC régime libre

II/A Présentation

Définition E4.2 : Circuit LC libre

- Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- **On suppose le condensateur initialement chargé**
- À $t = 0$, on coupe le générateur.

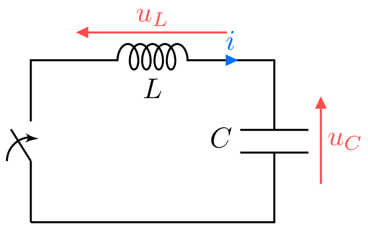

FIGURE 4.5

II/B Équation différentielle du circuit

Démonstration E4.1 : Équation diff. LC libre

Avec la loi des mailles,

$$
\begin{aligned}
& u_L + u_C = 0 && u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0 && \text{et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0 && \text{forme canonique}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. L assure $i(0^+) = 0$ et C assure $u_C(0^+) = E$ par continuité.

Propriété E4.4 : Équation diff. LC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en régime libre est

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}}$$

Application E4.2 : Unité de ω_0

On peut vérifier à cette étape que ω_0 est bien homogène à l'inverse d'un temps. Pour ça, deux manières :

Analyse directe

Sachant que RC et L/R sont des temps (cf. chapitre précédent) :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R}{LRC} = \underbrace{\left[\frac{L}{R}\right]^{-1}}_{\mathrm{s}^{-1}} \times \underbrace{[RC]^{-1}}_{\mathrm{s}^{-1}}$$

Et on a bien $\omega_0{}^2$ en s^{-2}, et donc ω_0 en s^{-1}, les radians n'ayant pas de dimension.

Analyse indirecte

En effet, l'équation différentielle est forcément une équation homogène. Ainsi

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{[u_C]}{[\mathrm{d}t]^2} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}^2}$$

et l'autre terme doit avoir la même unité :

$$[\omega_0{}^2 u_C] = [\omega_0]^2 \times [u_C] = \mathrm{V{\cdot}s^{-2}}$$

On en déduit que $\omega_0{}^2$ est de dimension s^{-2}, d'où la dimension de ω_0.

II/C Résolution de l'équation différentielle et graphique

Démonstration E4.2 : Solutions LC série descendant

L'équation étant déjà homogène, on injecte la forme générique :

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{rt} \Rightarrow r^2 \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \omega_0{}^2 \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} = 0 \Leftrightarrow r_\pm = \pm \mathrm{j}\omega_0$$

On écrit alors la forme réelle générale :

$$u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On trouve A avec une condition initiale :

$$u_C(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A \Leftrightarrow \boxed{A = E}$$

On trouve B avec l'autre condition initiale :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) = B\omega_0$$

$$\text{or,}\quad i(0) = 0 = C\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = CB\omega_0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

On obtient ensuite i avec la relation courant-tension :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CE\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

Attention E4.1 : Évaluation en 0 d'une dérivée

Il est malheureusement plus que commun de confondre la dérivée évaluée en 0, et la dérivée de la fonction évaluée en 0 :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_0 \neq \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t}}$$

Ça n'est pas parce qu'une fonction est nulle en un point que sa dérivée en ce point est nulle !

Propriété E4.5 : Solution LC descendant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en décharge avec $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$ donne :

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= E\cos(\omega_0 t) \\ i(t) &= -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

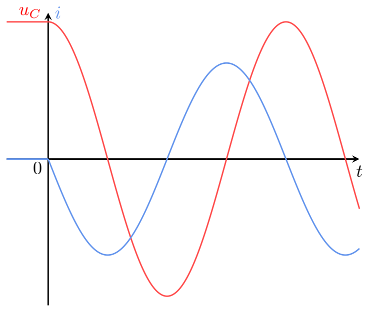

Figure 4.6

Interprétation E4.2 : Espace des phases LC

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace **(grandeur, dérivée)**, qui permet plus rapidement de sonder son évolution : c'est ce qu'on appelle **l'espace des phases**.

Ici, la tension s'exprime comme un cosinus et l'intensité comme un sinus. Or, $-\sin(x) = \cos(x + \pi/2)$: on dit qu'ils sont **déphasés de** $\pi/2$. Ils dessinent alors une **ellipse** dans l'espace des phases.

Le condensateur étant initialement chargé, l'intensité est nulle. Étant donné notre convention récepteur, lors de sa décharge l'intensité sera d'abord négative, et diminue jusqu'à s'annuler.

Pendant cette décharge, la bobine a stocké de l'énergie, qu'elle réémet alors dans le circuit et recharge le condensateur ; l'intensité est alors positive.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

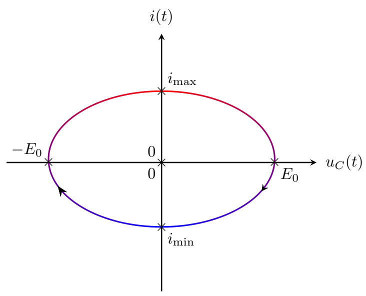

Figure 4.7

II/D Bilan énergétique

Démonstration E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :

$$\begin{aligned} u_C i + u_L i &= 0 \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow u_C \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i &= 0 \qquad f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)' \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C{u_C}^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

On identifie l'intérieur de la parenthèse à l'énergie du système (car par définition $\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$) pour avoir la propriété.

❤ Propriété E4.6 : Bilan d'énergie LC descendant

L'énergie emmagasinée dans le circuit est

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} C {u_C}^2 + \frac{1}{2} L i^2}$$

Elle est **conservée à chaque instant** et résulte de l'**échange périodique** d'énergie entre le condensateur et la bobine.

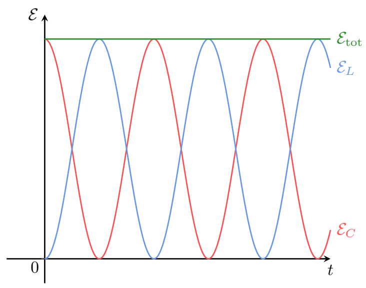

Figure 4.8

Remarque E4.1 : Vérification conservation de l'énergie LC

On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que ${\omega_0}^2 = (LC)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C u_C(t)^2 &= \frac{1}{2} C E^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \text{et} \quad \frac{1}{2} L i(t)^2 &= \frac{1}{2} \underbrace{LC^2 {\omega_0}^2}_{=C} E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{1}{2} C E^2 \left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2} C E^2 = \text{cte} \end{aligned}$$

Important E4.1 : Conclusion LC descendant

On retrouve bien des oscillations de la tension aux bornes de u_C comme dans l'approche expérimentale, avec une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ qui augmente avec L et C.

Il n'y a donc **pas d'amortissement ici** ! En effet les composants utilisés ici sont idéaux, et conservent totalement l'énergie, il n'y a pas de raison d'en perdre.

Il y a eu une simplification que l'on effectue souvent : **on a négligé les effets dissipatifs**.

III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre

III/A Introduction

❤ Définition E4.3 : Force de Hooke de rappel d'un ressort

On définit la force de Hooke par :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{rappel}} = \pm k(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u_x}}$$

- ◇ $k > 0$ la **constante de raideur** en **N·m^{-1}** ;
- ◇ ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- ◇ $\vec{u_x}$ un vecteur unitaire ($\|\vec{u_x}\| = 1$) dirigé selon x.

Le signe dépend de l'orientation du vecteur de base.

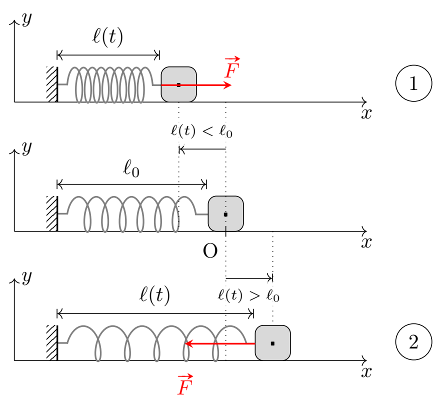

Figure 4.9 – $\vec{F} = \boxed{-}k(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u_x}$

III/B Présentation

Définition E4.4 : Situation initiale et bilan des forces

◇ **Système** : {point M} de masse m

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\text{O}', \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)

◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = (\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} \text{ ; } \overrightarrow{v} = \dot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x} \text{ ; } \overrightarrow{a} = \ddot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

◇ **Position initiale** : $\text{OM}(0) = L_0 > 0$

◇ **Vitesse initiale** : $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$

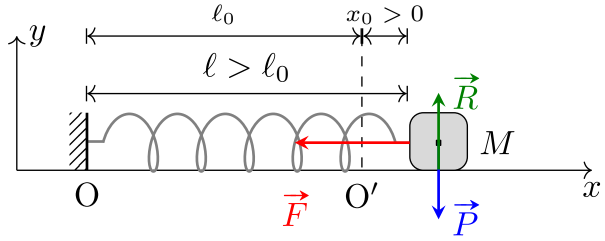

Figure 4.10

◇ **Bilan des forces :**

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction support	$\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Force de rappel	$\overrightarrow{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$

III/C Équation différentielle et solution

Démonstration E4.4 : Équation et solution ressort libre

Équation

La deuxième loi de Newton, ou **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\ell(t) - \ell_0)\\ -mg + R\end{pmatrix}$$

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve alors

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + k\ell(t) = k\ell_0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2x = 0}$$

avec $\quad x(t) = \ell(t) - \ell_0$

et $\quad {\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

Solution

On écrit la forme générale :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

◇ On trouve A :

$$x(0) = \boxed{A = L_0 - \ell_0} = x_0$$

◇ On trouve B :

$$v(0) = 0 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = B\omega_0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Donc

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

Or,

$$\boxed{v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Propriété E4.7 : Équation et solution ressort libre

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 \ell}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 \ell = {\omega_0}^2 \ell_0}$$

avec la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ℓ_0 est donc la **longueur d'équilibre** du système.

La position x et la vitesse v ont pour expressions

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \\ \text{et} \quad v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

avec $x_0 = L_0 - \ell_0$ le déplacement initial.

Important E4.2 : Analogie LC-ressort

La physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**.

Il y a oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\mathrm{eq}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\mathrm{eq}} = \ell_0$, comme u_C oscille autour de 0.
On associe donc $\boxed{q \text{ à } x}$ et $\boxed{i \text{ à } v}$, étant donné que pour un condensateur $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et que $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
De plus c'est la **masse** qui impose l'inertie du mouvement, comme l'**inductance** est l'inertie de l'intensité.
Finalement, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ en électrocinétique et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ en mécanique, donc on associe k à C^{-1}.

Méca $\longleftrightarrow$ Élec		
x	$\longleftrightarrow$	q
v	$\longleftrightarrow$	i
m	$\longleftrightarrow$	L
k	$\longleftrightarrow$	C^{-1}
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$

III/D Bilan énergétique

Définition E4.5 : Énergies potentielle élastique et mécanique

Le ressort emmagasine une énergie *potentielle* lors de sa déformation, telle que

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2}$$

On définit alors l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_m$ du système par

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Important E4.3 : Bilan de puissance en méca

On effectue un bilan de puissance en écrivant le PFD multiplié par v : $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Démonstration E4.5 : Conservation énergie ressort

À partir du PFD :

$$\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 && \times v \\ \Leftrightarrow\ & m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 && f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)' \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Propriété E4.8 : Conservation énergie ressort

Dans le système masse-ressort horizontal sans frottements, l'énergie mécanique est conservée :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \text{cte}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0}$$

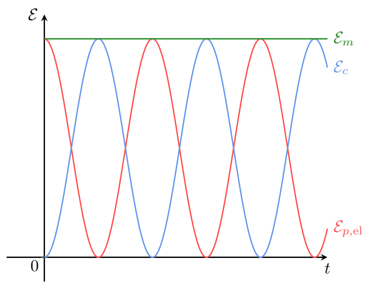

Figure 4.11

Remarque E4.2 : Vérification conservation énergie ressort

On vérifie avec les expressions analytiques, sachant que ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k{x_0}^2\cos^2(\omega_0 t) \\
\text{et} \quad &\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\underbrace{m{\omega_0}^2}_{=k}{x_0}^2\sin^2(\omega_0 t) \\
&\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}k{x_0}^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}k{x_0}^2 = \text{cte}
\end{aligned}$$

III/E Analyse correspondance

Interprétation E4.3 : Espace des phases ressort libre

Le ressort lâché à x_0 et $v_0 = 0$ voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter (algébriquement) jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ($x = 0$) avec une vitesse extrémale $v_{\min}$, avant de se comprimer en perdant de sa vitesse.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

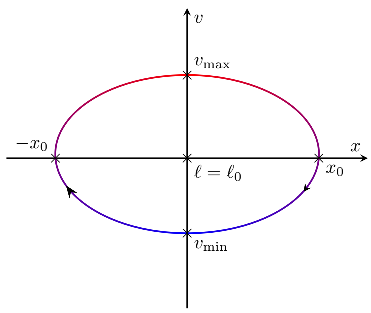

Figure 4.12

Important E4.4 : Conclusion harmonique

En réalité, les **frottements en mécanique existent**, et à chaque étape le système masse-ressort perd de l'énergie dans la dissipation par frottement créant de la chaleur. On va donc avoir une **trajectoire amortie** plus ou moins fortement.

Dans le cas électrique, c'est la **résistance que nous avions négligée** alors qu'elle existe toujours : notamment la bobine réelle est composée d'une bobine idéale et d'une résistance en série. C'est la résistance qui va **dissiper l'énergie** de l'oscillateur harmonique LC sous forme de chaleur par effet Joule et amortir l'oscillation de u_C.

IV Complément : circuit LC montant

IV/A Présentation

Définition E4.6 : Circuit LC montant

- Il est constitué de l'association en série d'un générateur idéal de f.e.m. E, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- **On suppose le condensateur initialement déchargé**
- À $t = 0$, on allume le générateur.

Une simulation est disponible en ligne[2].

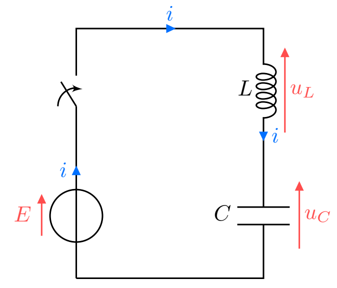

Figure 4.13

IV/B Équation différentielle et solution

Propriété E4.9 : Équation et solu° LC montant

L'équation différentielle $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC sous échelon montant est

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = {\omega_0}^2 E} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

de conditions initiales

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad i(0^-) = i(0^+) = 0}$$

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC sous échelon montant avec $u_C(0) = 0$ et l'intensité en découlant sont

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= E(1 - \cos(\omega_0 t)) \\ i(t) &= CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

Démonstration E4.6 : Équation et solution LC montant

Équation

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_C &= E \\ \Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C &= E \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C &= \frac{1}{LC}E \end{aligned}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

forme canonique

Solution

Par changement de variable, on a

$$u_C(t) - E = A' \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- On trouve φ_0 :

$$i(0) = 0 = C\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -A'\omega_0 \sin(\varphi_0)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi_0 = 0}$$

- On trouve A' :

$$u_C(0) - E = A' \cos(0) \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

Donc $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)}$

On obtient ensuite i avec la RCT :

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

2. https://tinyurl.com/ypagwnb6