Correction du TD d'entraînement

I Oscillateur à deux ressorts

1)a) Cette fois-ci, on a deux ressorts : le premier tire dans le sens $-\overrightarrow{u_x}$ et le second dans le sens $+\overrightarrow{u_x}$; ainsi le bilan des forces s'exprime :

Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Ressort 1 $\overrightarrow{F}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -k(\ell_{\text{eq}} + x(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$
Ressort 2 $\overrightarrow{F}_2 = +k(\ell_2(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = +k(\ell_{\text{eq}} - x(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$

On a en effet $\ell_1(t)$ la longueur du ressort 1 qui s'exprime $\ell_1 = \text{AM}$. Or, d'après l'énoncé $\ell_{\text{eq}} = \text{AO} = \text{OB}$: en décomposant (**puisque les distance sont sur le même axe**), on a donc $\text{AM} = \text{AO} + \text{OM} = \ell_{\text{eq}} + x$.

Le ressort 2 a comme longueur $\ell_2(t) = \text{MB} = \text{MO} + \text{OB}$ soit $\ell_2(t) = \ell_{\text{eq}} - x(t)$.

Ainsi, le PFD donne

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} + x - \cancel{\ell_0}) + k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} - x - \cancel{\ell_0})\\ -mg + R\end{pmatrix}$$

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

b) Sous forme canonique, cette équation se réécrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2x = 0}$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$ et donc de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$. Doubler la constante de raideur divise par $\sqrt{2}$ la période : le ressort oscille plus vite qu'avec un seul ressort.

c) L'expression générale de $x(t)$ est donc $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Or, en $t = 0$, on a $x(0) = x_0 = A$, et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = \omega_0 B$; ainsi

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

2)a) On ajoute $\overrightarrow{F}_{\text{frott}} = -\alpha v\,\overrightarrow{u_x}$ au PFD, ce qui donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x = 0}$$

b) On sait qu'on a des oscillations amorties quand le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif : $\Delta < 0$. Or ici, l'équation caractéristique est

$$r^2 + hr + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = h^2 - 4{\omega_0}^2$$
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\cancel{2}} < \underset{2}{\cancel{4}}{\omega_0}^{\cancel{2}} \Leftrightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{2k}{m}}$$
$$\Leftrightarrow \alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

Dans ce régime, on aura donc les racines

$$r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}$$

La solution générale est alors

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-ht/2}\left[D\cos(\omega t) + E\sin(\omega t)\right]}$$

On a les mêmes conditions initiales, soit $x(0) = x_0 = D$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = -\frac{h}{2}x_0 + \omega E$, d'où $E = \frac{h}{2\omega}x_0$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = x_0\mathrm{e}^{-ht/2}\left[\cos(\omega t) + \frac{h}{2\omega}\sin(\omega t)\right]}$$

On a donc une pseudo-période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}}$

☆☆ II Décrément logarithmique électrique

1) R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) = u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

2) On applique les lois de KIRCHHOFF :

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i = E$$

Avec la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$

En combinant :

$$u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E$$
$$\Leftrightarrow u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E$$
$$\Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \underset{\frac{R_2}{R_2}}{\cancel{1}}\right)u = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)}$$

3)a) On a un régime pseudo-périodique, où on lit que $\boxed{T = 600\,\mu\mathrm{s}}$.

b) On ne peut calculer δ qu'avec une pseudo-période ici. On lit au premier pic à t_1 la valeur de la tension **par rapport à la masse** : $u(t_1) = 4\,\mathrm{V}$. Au second pic à $t_2 = t_1 + T$ on a : $u(t_1+T) = 2{,}5\,\mathrm{V}$. De plus, $u_\infty = 2\,\mathrm{V}$. Ainsi,

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{4-2}{2.5-2}\right) = \ln(4) = 1{,}39}$$

4) Pour la solution de l'équation homogène, on cherche les racines du polynôme caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\lambda \pm \mathrm{j}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement u_∞, on aura la forme générale

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + u_\infty}$$

5) Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\underbrace{\cos(\omega t + n\omega t)}_{=\cos\omega t} + B\underbrace{\sin(\omega t + n\omega t)}_{=\sin\omega t}\right)}_{u(t)-u_\infty}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty} = \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda nT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 1{,}39 \\ T = 600\,\mu\mathrm{s} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{\lambda = 2{,}32 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$

6) On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 200\,\Omega \\ R_2 = 5\,\mathrm{k}\Omega \\ L = 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda = 2{,}32 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{C = 76\,\mu\mathrm{F}}$

Interprétation E5.1 : À retenir

En régime pseudo-périodique, l'amortissement du signal est dû à l'exponentielle de la solution générale. En calculant le logarithme du rapport de la solution à un instant t et de la solution à un instant $t+nT$ avec T la période on calcule donc le facteur de l'exponentielle décroissante, ce qui permet de trouver les caractéristiques du circuit.

III Décrément logarithmique mécanique

1) On repère par $z(t)$ l'altitude du ressort. Étant donné le système, le mouvement ne s'effectue que selon $\overrightarrow{u_z}$, et on a $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ et $a = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$. De plus, la longueur ℓ du ressort s'identifie à l'altitude $z(t)$ de la masse. On effectue donc le **bilan des forces** en faisant attention au sens de $\overrightarrow{u_z}$:

Poids $\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_z}$
Ressort $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(z(t)-\ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$
Frottement $\overrightarrow{F} = -\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}$

Ainsi, le **PFD** donne

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(z(t)-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = mg + k\ell_0}$$

À l'équilibre, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = 0$, on trouve donc

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

À cause du poids qui n'est cette fois pas compensé par la réaction du support, la longueur d'équilibre est plus grande que la longueur à vide du ressort. On réexprime l'équation différentielle avec le changement de variable de l'énoncé pour avoir

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = 0}$$

2) On met l'équation sous forme canonique et on identifie :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

3) On exprime l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

On observe des oscillations, donc $\Delta < 0$. Les racines sont donc

$$\boxed{r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q^2}}}$$

et les solutions sont de la forme

$$\boxed{z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]}$$

Sans conditions initiales, on ne peut déterminer A et B. On peut cependant exprimer T :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

4) Par construction, $u_{\text{eq}} = 0$, et on a

$$u(t+nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\underbrace{\cos(\omega(t+nT))}_{=\cos\omega t} + B\underbrace{\sin(\omega(t+nT))}_{=\sin\omega t}\right]}_{=u(t)} \Leftrightarrow u(t+nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}u(t)$$

Ainsi,

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)}{\mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}u(t)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{n\frac{\omega_0}{2Q}T}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T}$$

En développant T on trouve

$$\delta = \frac{1}{2Q}\frac{\overbrace{\omega_0 T_0}^{=2\pi}}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

ce qui est bien indépendant du temps t.

5) Soit $t_{\max}$ le temps du premier maximum. On relève les ordonnées des maximums successifs de $u(t)$, c'est-à-dire $u(t_{\max}+nT)$, et on calcule le logarithme népérien de deux longueurs successives :

n	$u(t_{\max}+nT)$	δ
0	2,9	0,37
1	2,0	0,29
2	1,5	0,31
3	1,1	0,31
4	0,8	0,29
5	0,6	

Mise à part la première valeur, les résultats sont assez peu dispersés. Cela valide bien le modèle d'oscillateur amorti pour cette expérience ; l'écart de la première valeur est sûrement lié à des non-linéarités du ressort aux longueurs importantes.

6) On peut donc estimer qu'on a $\delta = 0{,}30 \pm 0{,}01$. On isole Q de son expression :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} \Leftrightarrow \sqrt{4Q^2-1}^2 = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \Leftrightarrow 4Q^2 = 1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2}+\frac{1}{4}}}$$
$$\text{A.N. : } \boxed{Q \approx 10{,}5}$$

On trouve bien $Q \gg 0.5$ comme le montre l'oscillogramme. Quant à ω, on peut estimer T en comptant plusieurs périodes : on a $t_{\max} = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $t_{\max}+5T = 4{,}9\,\mathrm{s}$, donc on a $5T = 4{,}2\,\mathrm{s}$, c'est-à-dire $\boxed{T \approx 0{,}95\,\mathrm{s}}$. Enfin, $\omega = 2\pi/T$, donc

$$\boxed{\omega = 6{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

7) Comme $Q \gg 0.5$, on a $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On a donc

$$\boxed{m \approx \frac{k}{\omega^2}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ \omega = 6{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{m \approx 230\,\mathrm{g}}$$

Finalement, on a

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ m = 230\,\mathrm{g} \\ Q = 10{,}5 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\alpha \approx 0{,}15\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$$