Les torseurs : explications

Plan

Rappel : produit vectoriel

Préambule : champ de vecteurs

Définition d'un torseur/propriétés/éléments constitutifs

- Définition
- Illustration et explication
- L'axe central
- Equiprojectivité
- Les deux invariants d'un torseur

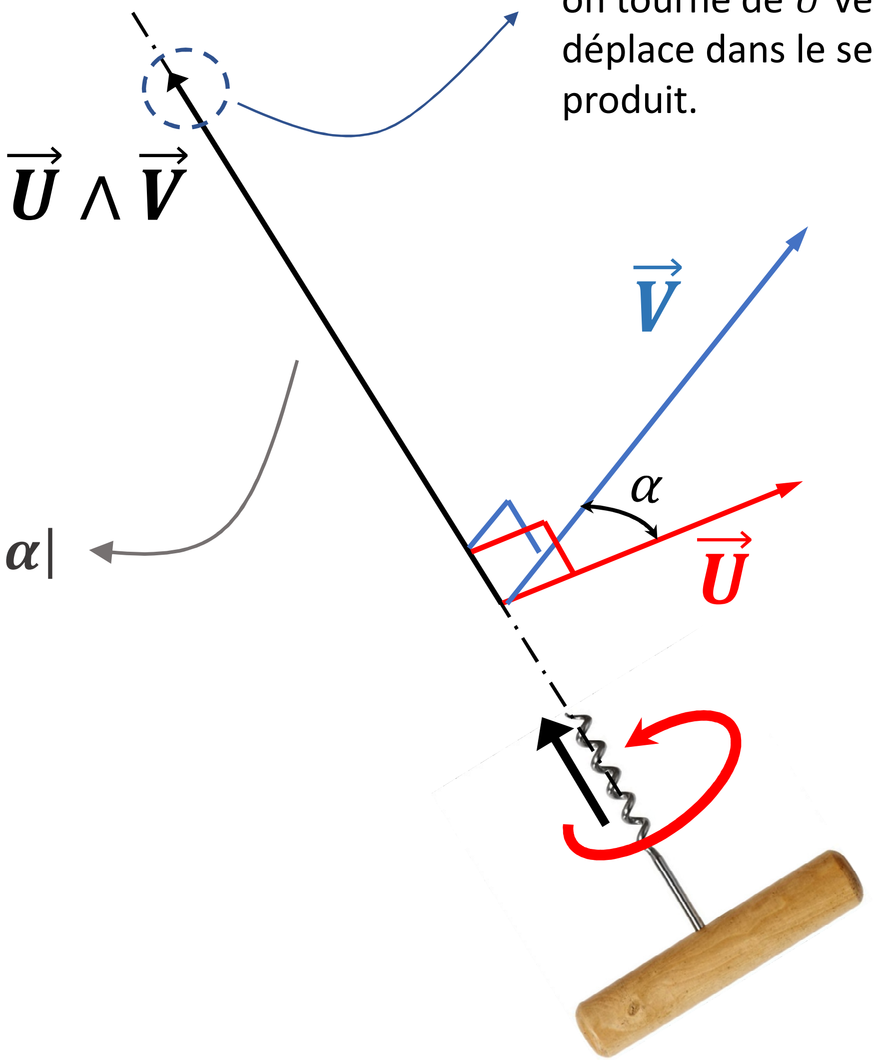
Représentation et manipulation pratique d'un torseur : les éléments de réduction

Opération sur les torseurs : Somme, produit externe, produit interne

Les trois torseurs particuliers

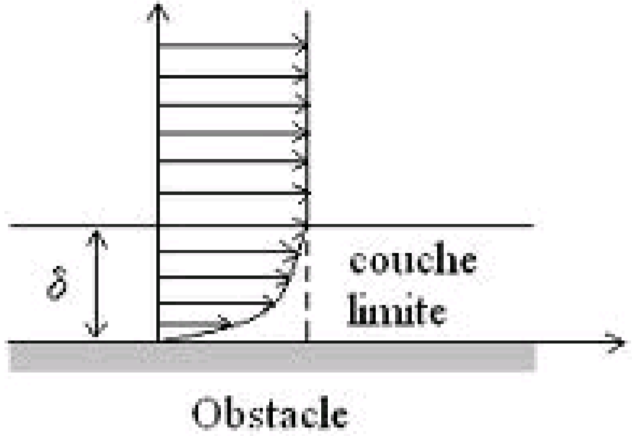
Rappel : produit vectoriel

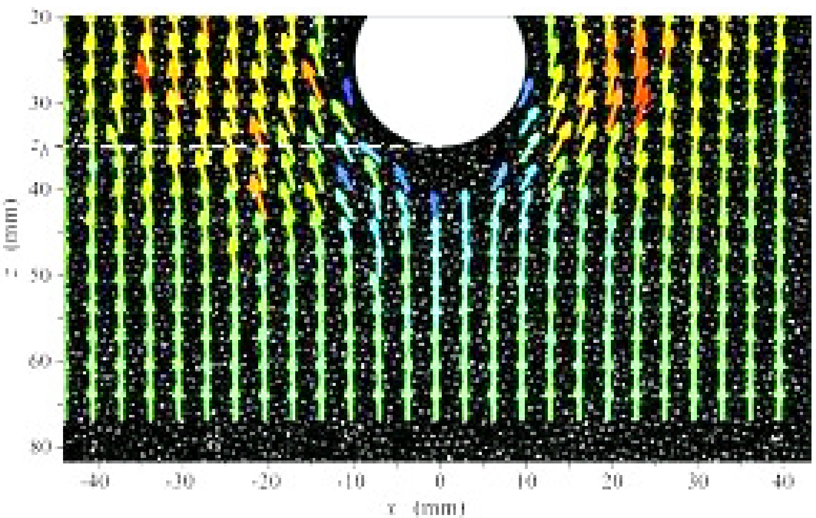
Sens tel que le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ est DIRECT.
= Règle du tire bouchon : quand on tourne de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$ on se déplace dans le sens du vecteur produit.

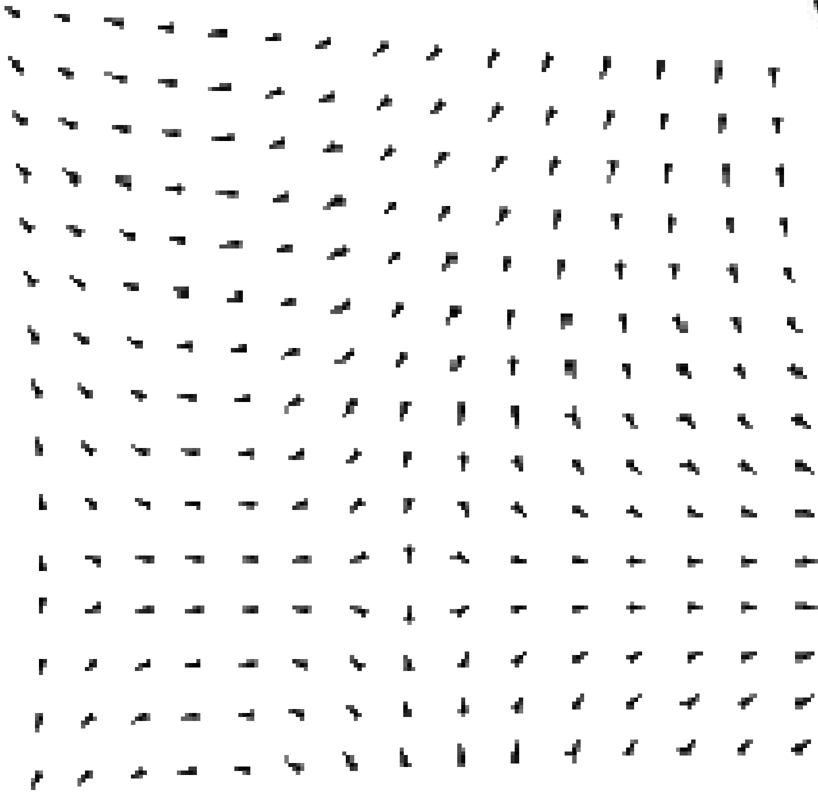


$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times |\sin \alpha|$$

Préambule : champ de vecteurs







Définition d'un torseur

Soit un espace affine $\mathcal{E}$ et un espace vectoriel $\mathcal{V}$. Un torseur, noté {T}, est la réunion de deux champs de vecteurs :

- **Un premier champ de vecteurs constant appelé *résultante* noté $\vec{R}$**
- **Un deuxième champ de vecteurs variable selon le point *P* de l'espace affine, appelé champ de *moments* et noté $\overrightarrow{M(P)}$.**

La relation liant deux moments aux points A et B est :

$$\overrightarrow{M(B)} = \overrightarrow{M(A)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

L'expression mathématique précédente est appelée formule de Varignon.

Elle caractérise un champ de moments, dit, ***antisymétrique****.*

ILLUSTRATION D’UN TORSEUR

Illustration d’un torseur

Commençons par la résultante : constante en tous points de l’espace

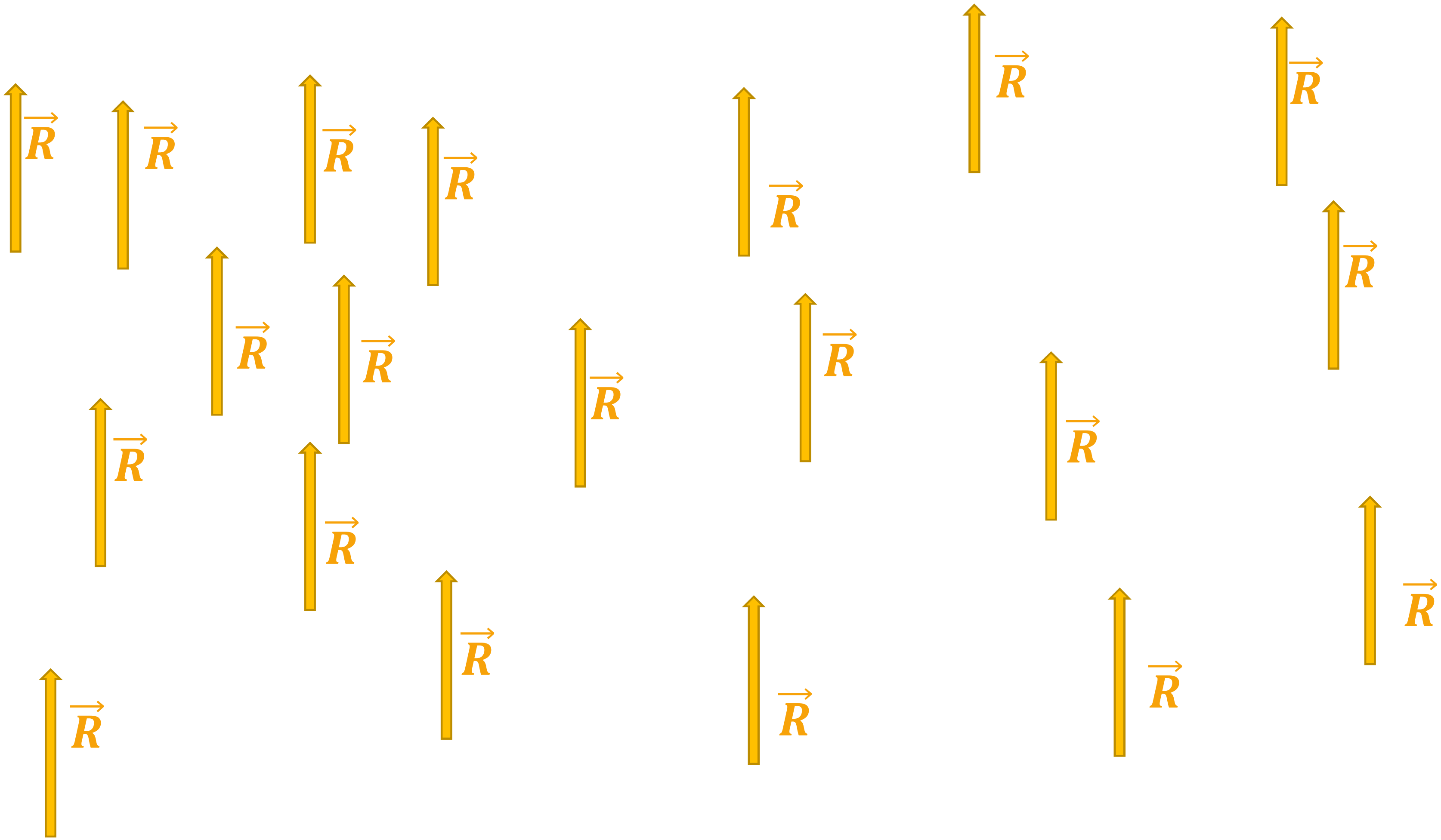


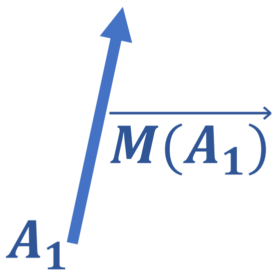
Illustration d’un torseur

Plaçons maintenant les moments.

Cela est un peu plus délicat.

Il est nécessaire de se fixer:

- La résultante $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}$
- Un point A1 et le vecteur moment $\overrightarrow{\boldsymbol{M(A_1)}}$ en ce point.



Pour déterminer le moment en un autre point, il suffit d'appliquer :

$$\underbrace{}\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A_2})} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A_1})} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{R}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}}$$

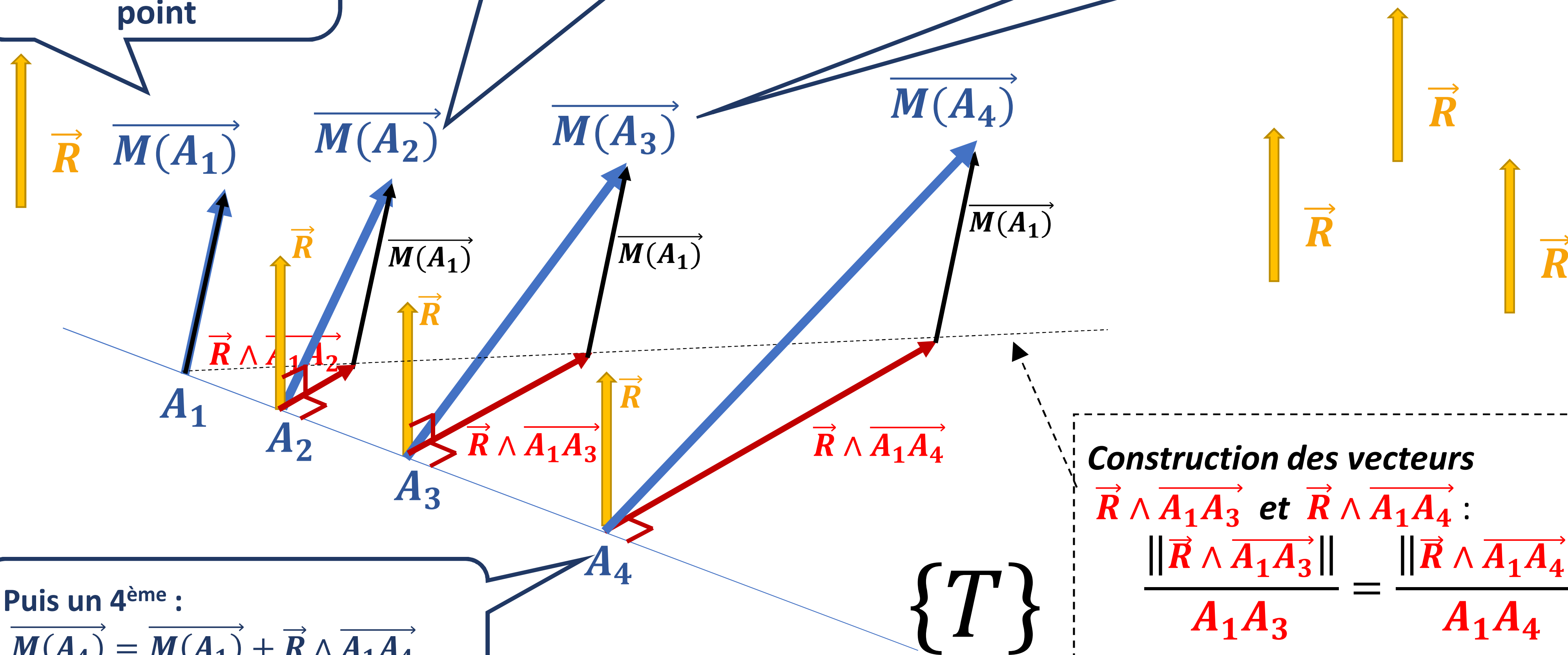
$\perp \ \vec{R}$
$\perp \ \overrightarrow{A_1A_2}$
$\left(\vec{R},\ \overrightarrow{A_1A_2},\ \vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}\right)$ directe
$\left\|\vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\vec{R}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|$ ×1 ; 1 car A2 est choisi tel que $(A_1A_2) \perp \vec{R}$ par soucis de simplicité

Illustration d'un torseur : le champ de moments

Plaçons arbitrairement le 1^er^ moment et le 1^er^ point

Déterminons ensuite le moment en un autre point : $\overrightarrow{M(A_2)} = \overrightarrow{M(A_1)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}$

Puis un 3^ème^ moment toujours à partir de $\overrightarrow{M(A_1)}$ **:** $\overrightarrow{M(A_3)} = \overrightarrow{M(A_1)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}$

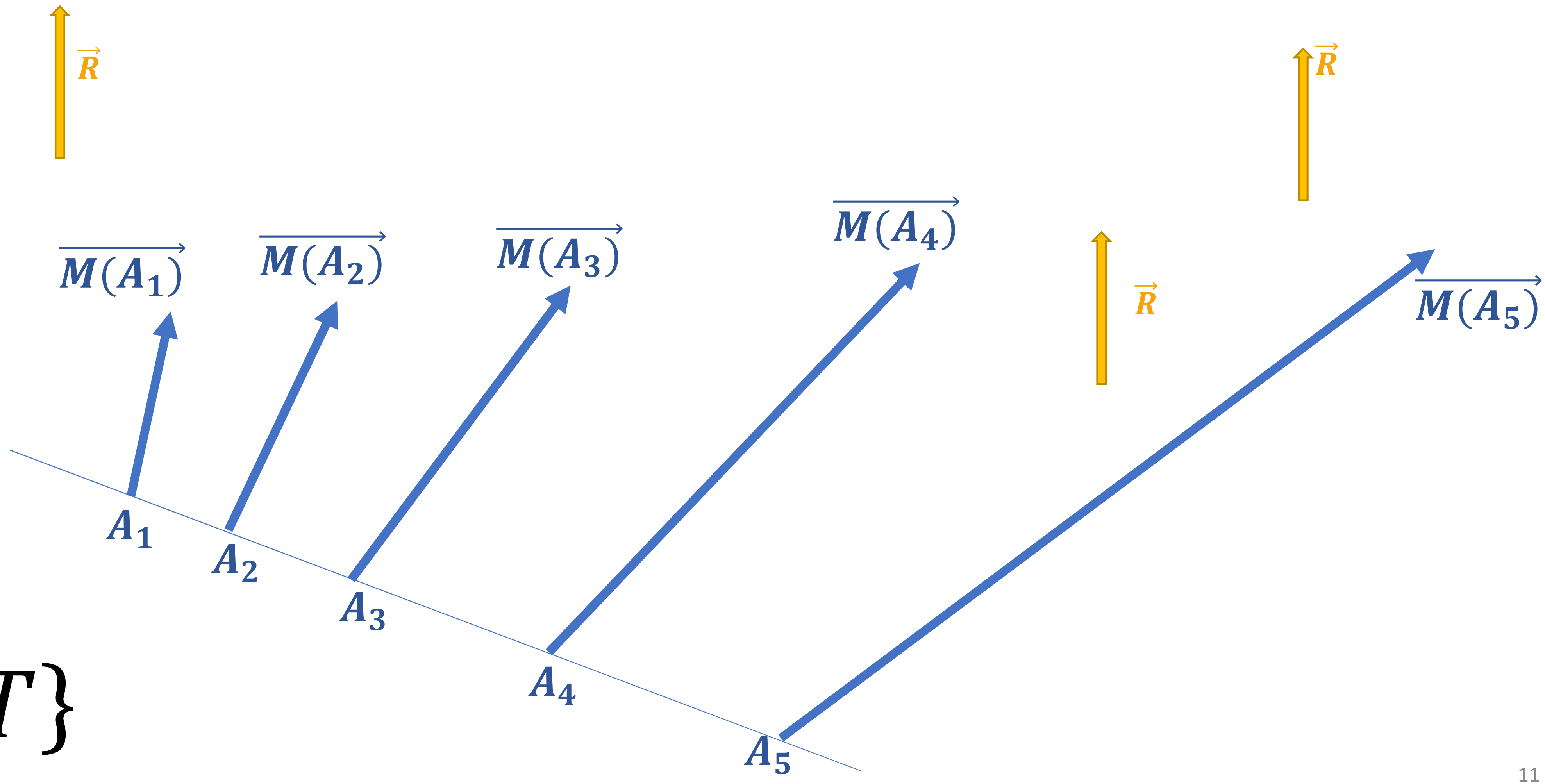


Construction des vecteurs $\vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}$ ***et*** $\vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\frac{\|\vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}\|}{A_1A_3} = \frac{\|\vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}\|}{A_1A_4}$$

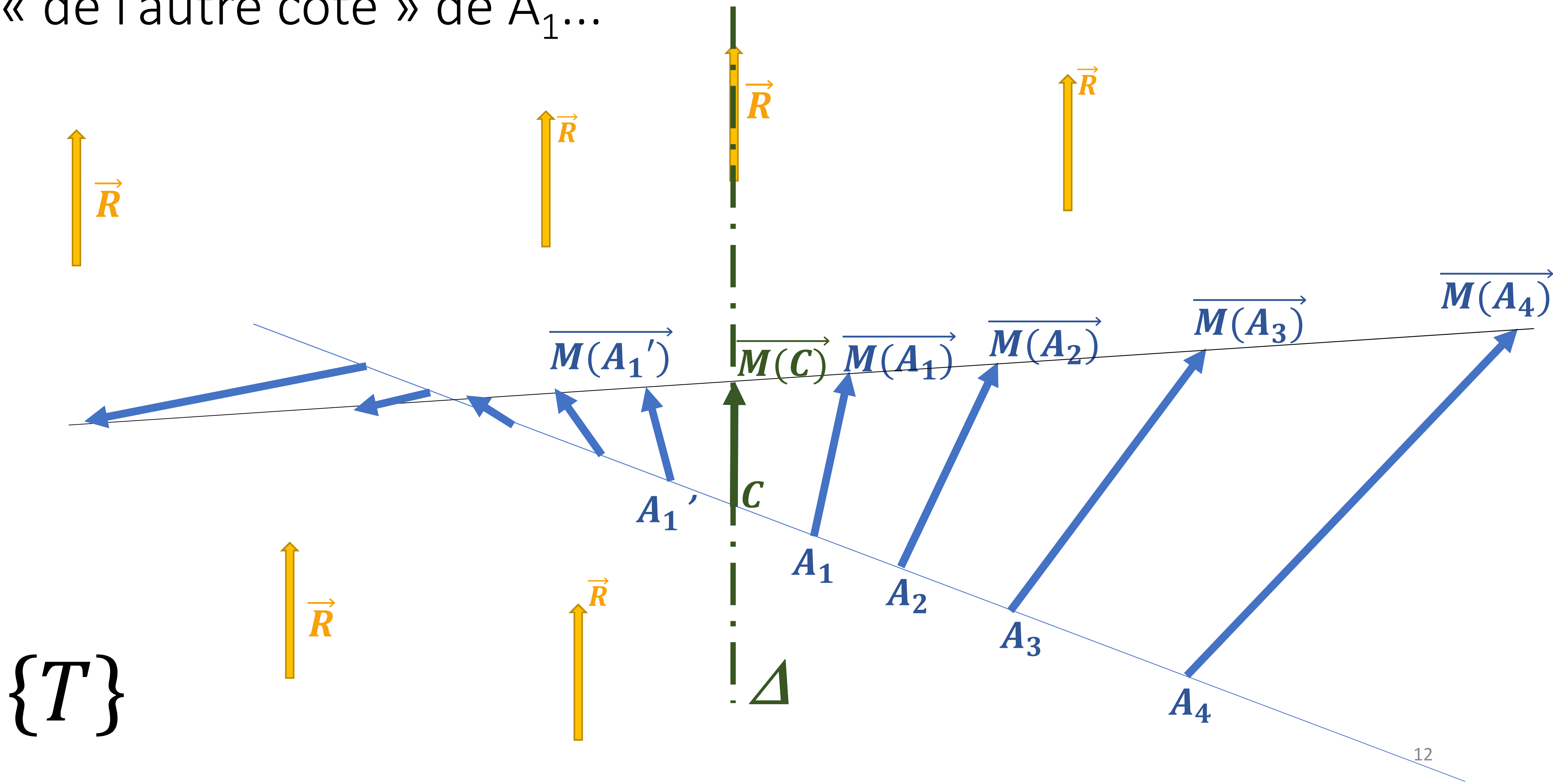
Puis un 4^ème^ : $\overrightarrow{M(A_4)} = \overrightarrow{M(A_1)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}$

Enlevons les traits de construction



$\{T\}$

Construisons les moments aux points « de l'autre coté » de A_1...



Conclusions

- Pour tracer le torseur il a fallu définir 2 vecteurs, ni plus, ni moins : la résultante $\vec{R}$ et un des moments en un point de l'espace $\overrightarrow{M(A_1)}$.
- Le champ de moments a une forme d'hélice qui se déploie à l'infini
- Il existe un point C tel que son moment $\overrightarrow{M(C)}$ colinéaire à la résultante $\vec{R}$. Un tel point est appelé point central du torseur.
- On montre que ces points centraux sont infinis et disposés sur la droite Δ=[C,$\overrightarrow{M(C)}$] appelée axe central du torseur.
- La norme des vecteurs moment diminue quand ils se rapprochent de l'axe central.
- L'axe central est la droite sur laquelle les moments ont une norme minimale.

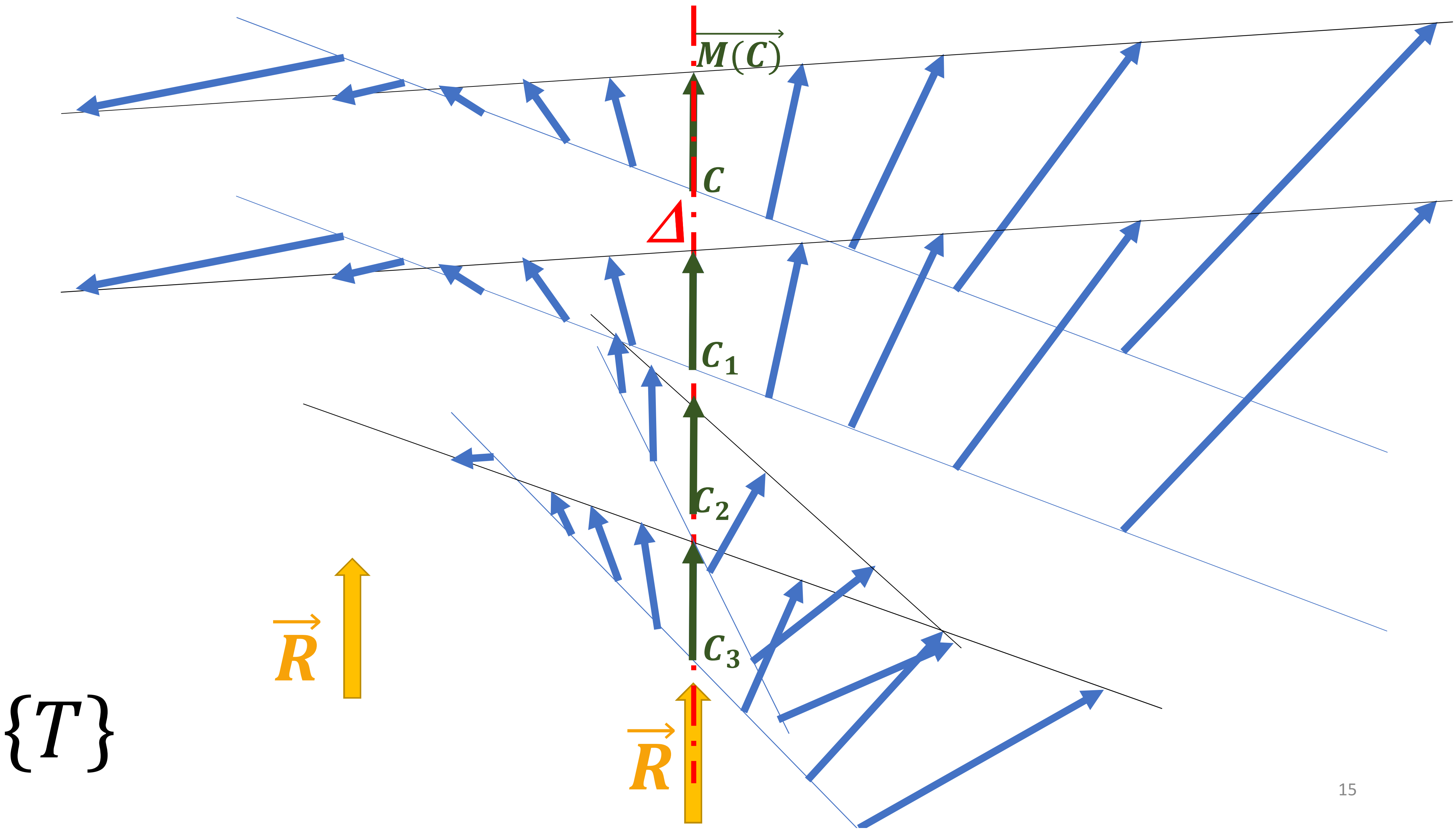
Et pour les autres points de l’espace ? Ceux qui ne sont pas sur la droite(CA_1)…

$\Rightarrow$La construction est similaire

$\Rightarrow$On obtient la suite du champ de moments par translation de la construction précédente selon le vecteur résultante $\vec{R}$ …

$\Rightarrow$ …et par rotation de cette même construction autour de l’axe central

$\Rightarrow$Ainsi l’ensemble des points de l’espace est balayé et possède son moment.


$\overrightarrow{M(C)}$
C
Δ
C_1
C_2
C_3
$\overrightarrow{R}$
$\overrightarrow{R}$
$\{T\}$

Bref : un champ de vecteur c’est assez « dense » et « toufu » !

Un torseur c’est un enchevêtrement de vecteurs.

Ne perdez pas de vue que c’est cela la réalité.

Car souvent on l’oublie.

En effet, nous verrons que finalement la formalisation d’un torseur et les calculs sont simples et font oublier le champ de vecteurs !..

Les éléments centraux d’un torseur

1. Point central
2. Axe central
3. Moment central

On ne donne pas les démonstrations. Ce n’est pas l’objectif de ce diaporama qui n’est pas un cours.

Les résultats donnés ci-dessous sont visibles lors de la construction précédente.

1. Point central d'un torseur {T}

Définition : Un point C d'un torseur {T} est central si en ce point le moment $\overrightarrow{M(C)}$ est colinéaire à la résultante $\vec{R}$.

$$\overrightarrow{M(C)} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

2. Axe central d'un torseur {T}

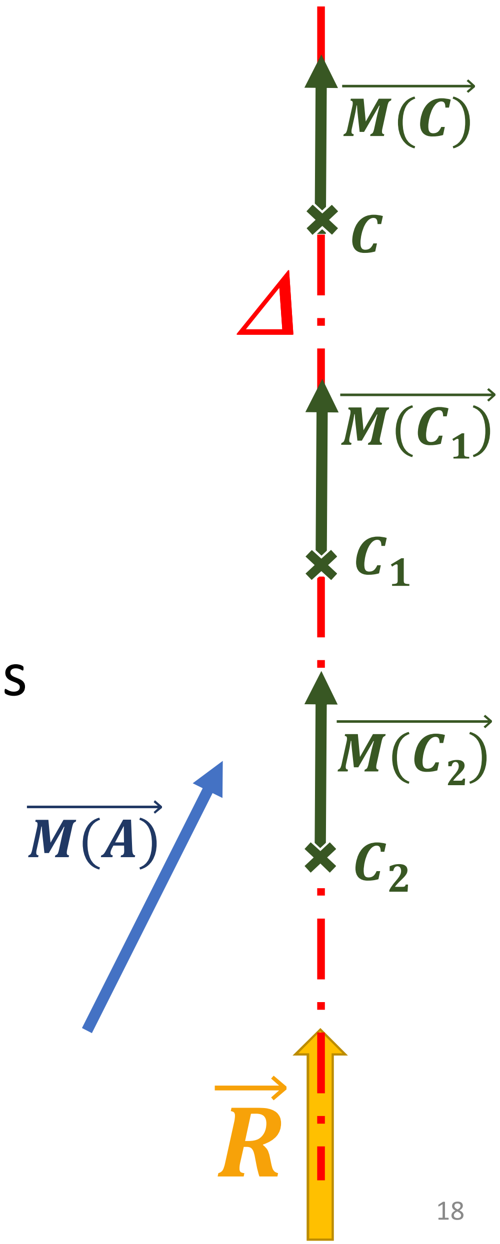
Définition : L'axe central Δ d'un torseur {T} est le lieu géométrique des points centraux. On montre que les points centraux sont alignés sur une droite : Δ.

3. Moment central d'un torseur {T}

Définition : le moment central d'un torseur {T} est le moment en un point central *C* de {T}. On montre que les moments centraux sont égaux !

Propriété : la norme des moments centraux est minimale !

$\|\overrightarrow{M(C)}\|<\|\overrightarrow{M(A)}\|$ (C=pt central, A non central)



Comment déterminer l'axe central d'un torseur ?

- On connait la résultante du torseur : $\vec{R}$
- On connait le moment en un point quelconque A : $\overrightarrow{M(A)}$
- Un point C de l'axe central est déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M(A)}}{\vec{R}^2}$$ (se démontre assez facilement)

- La direction de l'axe est <u>par définition</u> $\vec{R}$!

- Et pour avoir le moment central ? $\overrightarrow{M(C)}$=… facile !

Equiprojectivité des vecteurs moments d'un torseur {T}

Ecrivons la relation entre deux moments d'un même torseur :

$$\overrightarrow{M(B)} = \overrightarrow{M(A)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Multiplions par le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{M(B)}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M(A)}.\overrightarrow{AB} + (\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AB}$$

Or : $(\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{\boldsymbol{M(B)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M(A)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Equiprojectivité… des vecteurs moments d’un torseur {T}

La relation $\overrightarrow{\boldsymbol{M(B)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M(A)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ démontrée précédemment traduit l’équiprojectivité des moments en 2 points quelconques sur la droite qui relie ces deux points.

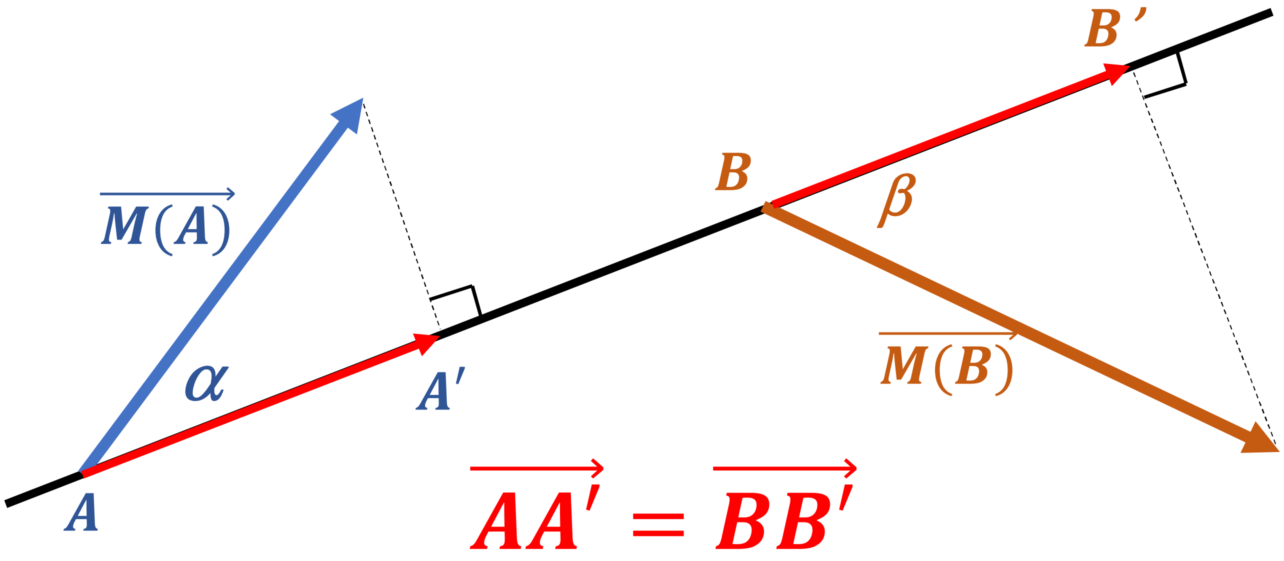
Explications :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{M(B)}}\right\|.\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right\|.\boldsymbol{cos(\alpha)}$$

$$= \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{M(A)}}\right\|.\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right\|.\boldsymbol{cos(\beta)}\overrightarrow{\boldsymbol{M(B)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M(A)}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

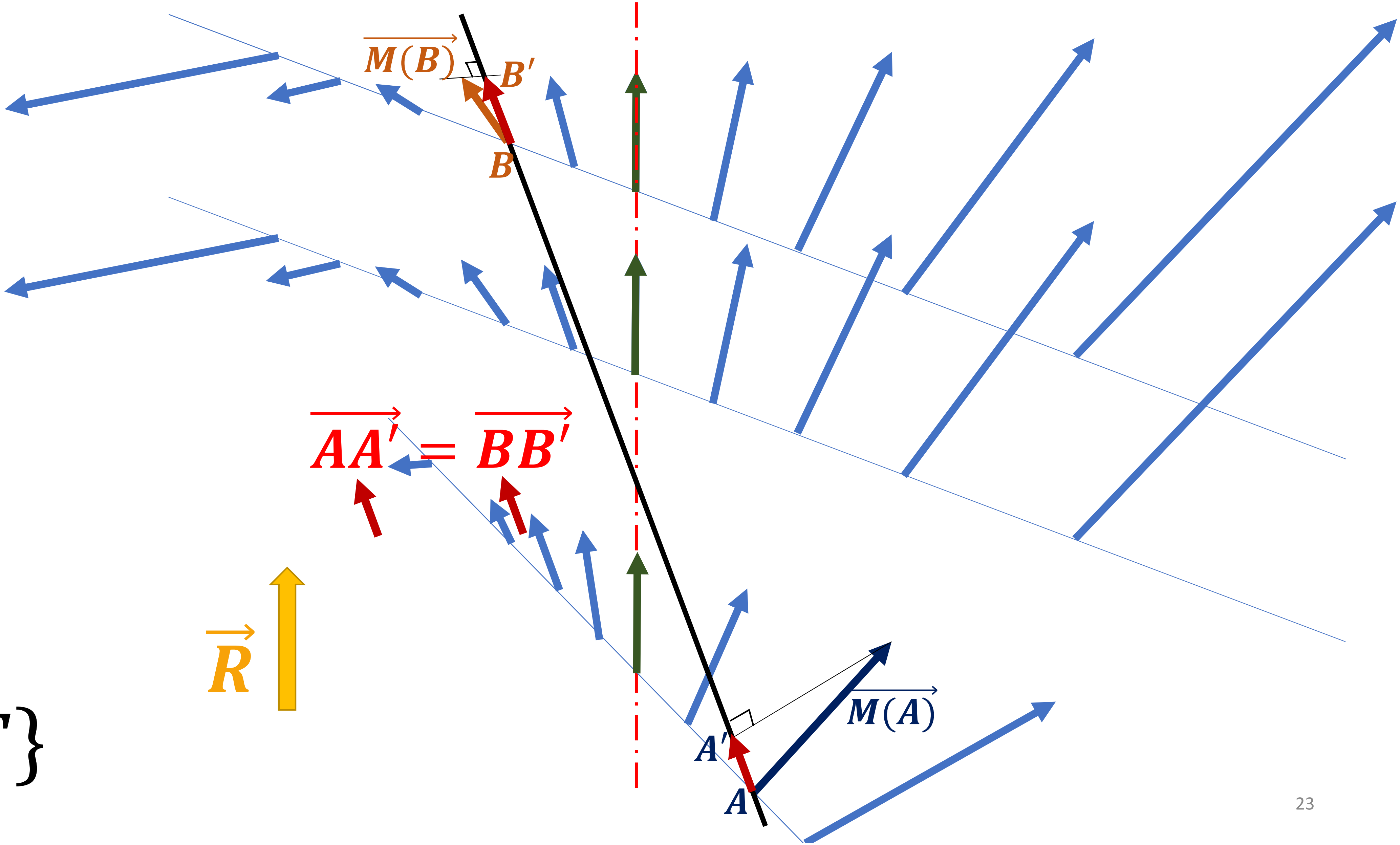
$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{M(B)}}\right\|.\boldsymbol{cos(\alpha)} = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{M(A)}}\right\|.\boldsymbol{cos(\beta)}$$

Donc : $\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BB'}}$



Equiprojectivité… des vecteurs moments d’un torseur {T}

Un point de vue plus global : regardons le champ de moment dans son ensemble.



$\overrightarrow{M(B)}$
B'
B
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$
$\overrightarrow{R}$
$\overrightarrow{M(A)}$
A'
A

$\{T\}$

Conclusion : Equivalence Equiprojectivité/Antisymétrie

Un champ de vecteurs antisymétrique est équiprojectif :

$$\overrightarrow{M(B)} = \overrightarrow{M(A)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{M(A)}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M(B)}.\overrightarrow{AB}$$

On démontre aussi l'inverse.

Un champ de vecteurs équiprojectif est antisymétrique :

$$\overrightarrow{M(A)}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M(B)}.\overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{M(B)} = \overrightarrow{M(A)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Un champ de moments est antisymétrique et équiprojectif.

Le deux invariants d’un torseur {T}

Un torseur donné {T} possède deux entités invariantes intrinsèques qui ne dépendent pas du point de l’espace considéré.

- **Invariant vectoriel de {T} : la résultante $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}$**

- **Invariant scalaire de {T} : la quantité $\vec{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})}$ est constante <u>quel que soit le point A</u> considéré et son moment $\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})}$.**

  Ainsi : $\vec{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})}$=$\vec{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B})}$ quel que soient A et B !

Démo : $\overrightarrow{M(B)} = \overrightarrow{M(A)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{M(B)}.\vec{R} = \overrightarrow{M(A)}.\vec{R} + \cancel{\left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}\right).\vec{R}}$

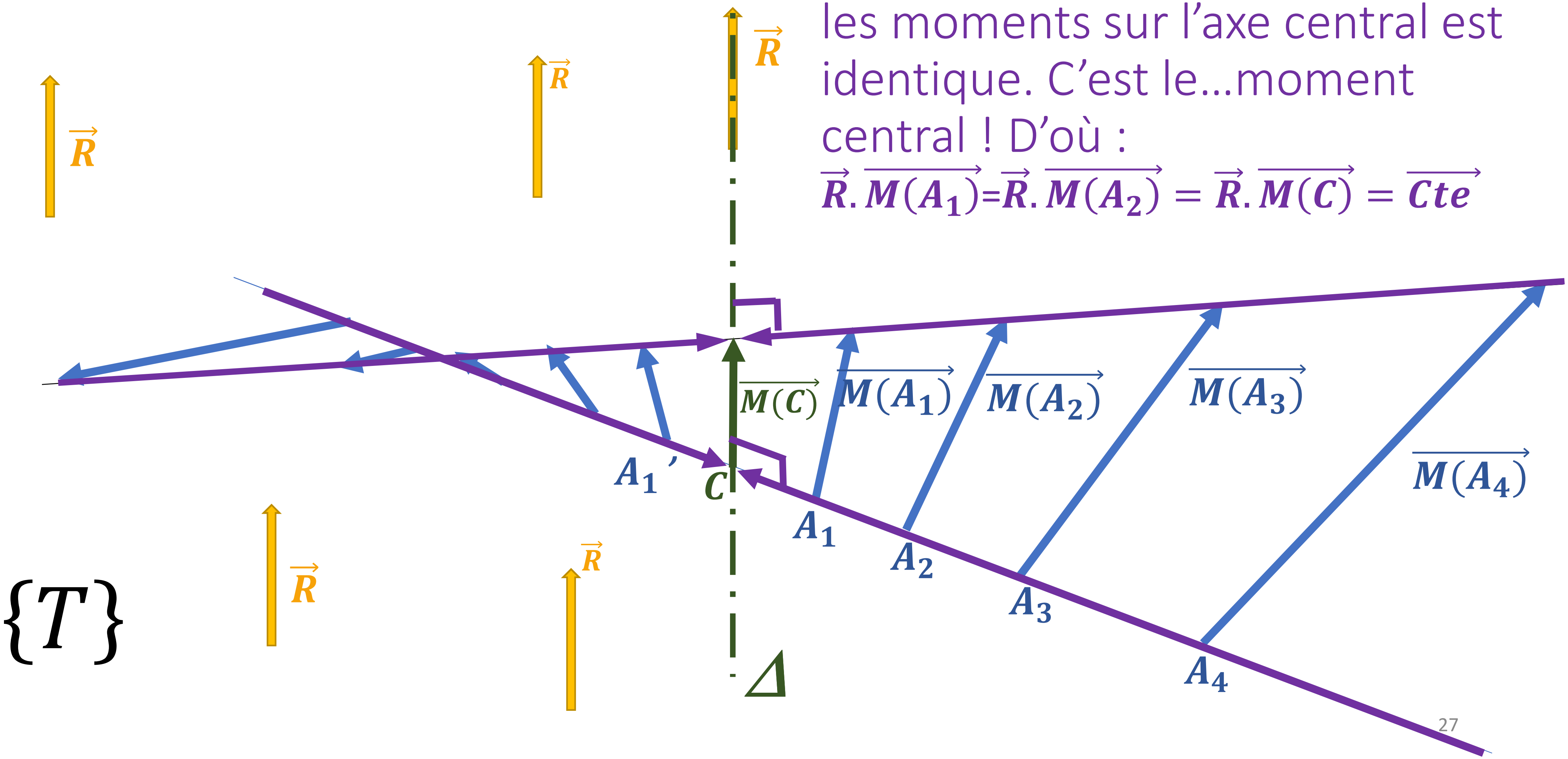
Que représente l’invariant scalaire du torseur {T} ?

Réponse : vous l’avez vu lors de la construction graphique du torseur… si si !

Observons la projection des moments sur l’axe central.

Conclusion : la projection de tous les moments sur l’axe central est identique. C’est le…moment central ! D’où :

$$\vec{R}.\overrightarrow{M(A_1)}=\vec{R}.\overrightarrow{M(A_2)}=\vec{R}.\overrightarrow{M(C)}=\overrightarrow{Cte}$$



Notation,
Représentation,
Manipulation pratique d'un torseur…

LES ELEMENTS DE REDUCTION D'UN TORSEUR

Problème posé

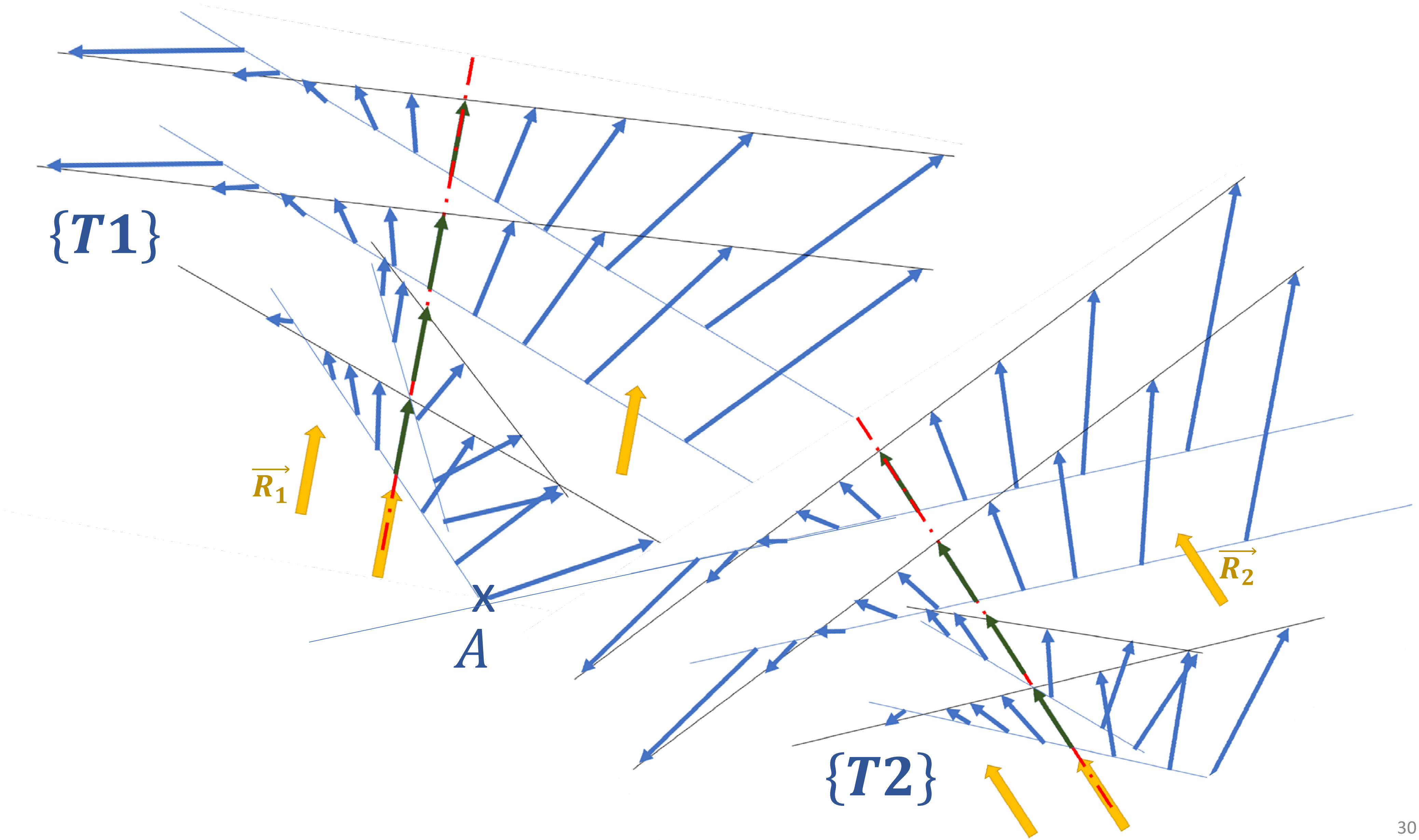
- Nous savons maintenant ce qu'est un torseur

Mais…

Comment le manipuler mathématiquement ?

Qu'est ce qui différencie de manière pragmatique un torseur **{T1}** d'un autre torseur **{T2}** ?

Réponse : vous l'avez entrevu précédemment !..



$\{T1\}$
$\overrightarrow{R_1}$
A
$\overrightarrow{R_2}$
$\{T2\}$

Les éléments de réduction d’un torseur

Pour réaliser la construction graphique nous avons du fixer :

- **La résultante $\vec{\boldsymbol{R}}$**
- **Un moment en un point A, $\overrightarrow{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})}$**

$\Rightarrow$ Un torseur **unique** {T} a ainsi pu être totalement construit !

Si un de ces éléments avait été différent, le torseur aurait été différent.

<u>Conclusion</u>

un torseur {T} est totalement défini <u>si on connait</u> :

- *sa résultante*

et

- *un quelconque de ses moments* en *un point* donné.

ON NOTE : $\{T\} = {}_{A}\left\{\dfrac{\vec{R}}{\overrightarrow{M(A)}}\right\}$

Torseur {T}

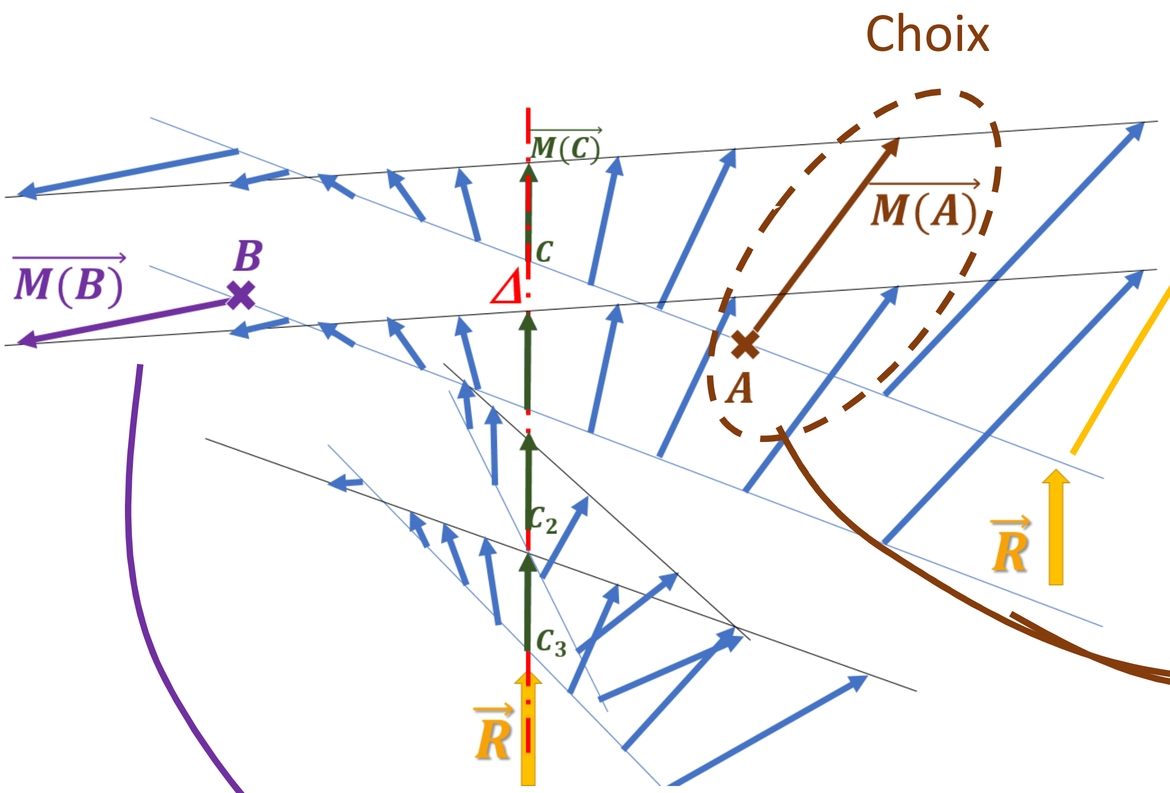
Ce signe « = » signifie dans ce contexte particulier « est représenté par »
ou bien
« est réduit en »

Point choisi pour réduire le torseur {T}

Les deux éléments de réduction :

- La résultante de {T} = $\vec{R}$
- Un moment de {T} au point choisi (A ici) = $\overrightarrow{M(A)}$

Le torseur {T}



Une infinité de réductions possibles…

Est représenté par

$$= \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{matrix} \right\}_A$$

Est représenté par

$$= \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M(B)} \end{matrix} \right\}_B$$

Ainsi un torseur {T} peut être réduit en des éléments différents :

$$\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix} \qquad \{T\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(B)} \end{Bmatrix}$$

- C'est le même torseur {T} mais réduit en deux points différents.
- La résultante est identique quel que soit le point de réduction. Seul le moment change. Normal, le champ de résultante est constant par définition !!
- En pratique, on travaille toujours avec les éléments de réduction ; à tel point que des abus de langage apparaissent…

Abus de langage sur les éléments de réduction.

$$\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix} .$$

Cette égalité est placée entre deux entités différentes : un double champ de vecteurs (le torseur {T}) et le couple de vecteurs qui le représentent !

On voit parfois (rarement) la notation suivante :

$$\{T\} : {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix} .$$

Cette utilisation du symbole «:» permet de ne pas confondre les deux entités (éléments de réduction et torseur). Mais son utilisation est bien rare !

Abus de langage sur les éléments de réduction.

- On lit, entend, écrit, souvent : « Le torseur est $_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix}$ ».

En fait ce n'est pas le torseur qui est égal à $_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix}$, mais ses éléments de réduction au point A.

- Dans les énoncés, on lit souvent « Ecrire le torseur au point Q… ». Bien entendu ce qui est demandé est l'écriture des éléments de réduction en Q !

Abus de langage sur les éléments de réduction.

- Ecrire ceci n'est pas très bon non plus :

$$\{T\} \color{red}{=} {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(B)} \end{Bmatrix}$$

En effet on écrit l'égalité entre deux couples d'éléments de réduction qui sont différents !!

Ces 2 éléments ne sont pas égaux !

Il faudrait écrire les deux lignes suivantes :

$\{T\} \color{red}{=} {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix}$ « {T} est représenté par les éléments de réduction $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M(A)}$ »

$\{T\} \color{red}{=} {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(B)} \end{Bmatrix}$ « {T} est représenté par les éléments de réduction $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M(B)}$ »

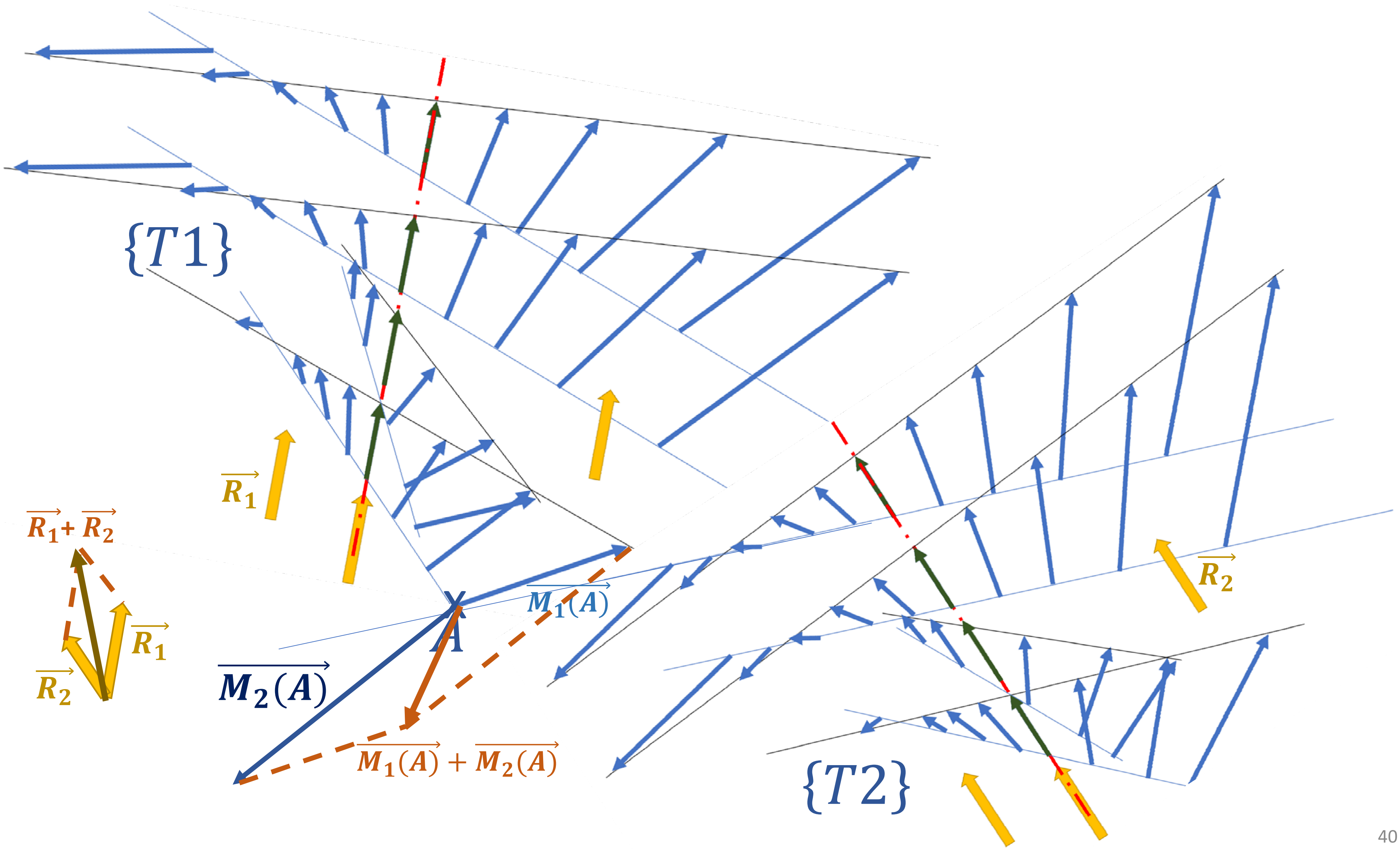
Opérations sur les torseurs

- Somme
- Produit externe
- Produit interne

Somme des torseurs

La question qui se pose est double :

- La somme de 2 torseurs donne-t-elle un torseur ?
- Si oui : « les éléments de réduction de la somme sont-ils la somme des éléments de réduction » ?


$\{T1\}$
$\{T2\}$
$\overrightarrow{R_1}$
$\overrightarrow{R_2}$
$\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_2}$
$\overrightarrow{R_1}$
$\overrightarrow{R_2}$
A
$\overrightarrow{M_1(A)}$
$\overrightarrow{M_2(A)}$
$\overrightarrow{M_1(A)}+\overrightarrow{M_2(A)}$

Soit 2 torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ représentés par les éléments de réduction suivants, exprimés au même point :

$$\{T1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1\ (A)} \end{Bmatrix} \qquad \{T2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2\ (A)} \end{Bmatrix}$$

En un point P quelconque de l'espace, sommons les deux vecteurs de chaque champ, les deux résultantes et les deux moments.

Au point P quelconque de l'espace nous avons 2 vecteurs: $\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} = \vec{R}$ et $\overrightarrow{M_1\ (P)} + \overrightarrow{M_2\ (P)} = M\ (P)$.

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{M(P)}$ sont-ils la résultante et le moment d'un torseur ?

Soit Q un autre point quelconque, exprimons les champs de moments :

$$\overrightarrow{M_1\ (P)} + \overrightarrow{M_2\ (P)} = \overrightarrow{M_1\ (Q)} + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{M_2\ (Q)} + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{M_1\ (P)} + \overrightarrow{M_2\ (P)} = \overrightarrow{M_1\ (Q)} + \overrightarrow{M_2\ (Q)} + \left(\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{M(P)} = \overrightarrow{M(Q)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

=> La somme des moments est un champ de moments dont le résultante est la somme des résultantes.

Conclusion

- On peut écrire le torseur somme *{T} = {T_1} + {T_2}*
- Les éléments de réduction de *{T}* sont la somme des éléments de réductions de

$$\{T_1\} + \{T_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1\ (A)} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2\ (A)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_1\ (A)} + \overrightarrow{M_2\ (A)} \end{Bmatrix}$$

- Bien entendu une somme d'éléments de réduction n'a de sens que si les points de réduction sont identiques !!
- Quand on fait des opérations avec des éléments de réduction, (somme, comparaison, comoment) il faut d'abord réduire les torseurs au même point !!

Multiplication d'un torseur par un réel

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad et \quad \{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix} \qquad alors \quad \lambda.\{T\} = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda.\vec{R} \\ \lambda.\overrightarrow{M(A)} \end{Bmatrix}$$

Produit de deux torseurs = comoment de 2 torseurs

Opération qui a 2 torseurs associe une réel

$$\{T_1\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1\ (A)} \end{Bmatrix} \qquad \{T_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2\ (A)} \end{Bmatrix}$$

=> $\boldsymbol{\{T_1\} \otimes \{T_2\}}$ **=** $\boldsymbol{\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (A)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (A)}}$

Le comoment est un produit… « scalaire » (sens générique de scalaire)

L'opération de produit entre deux torseurs n'a de sens que si le résultat **ne dépend pas du point de réduction**….

Car les éléments de réductions ne font que représenter les torseurs !

Le comoment des deux torseurs ne doit pas dépendre des éléments qui les représentent !!

Démonstration … changeons de point…

Changeons de point de réduction : transportons les moments de A en B.

$\{T_1\} \otimes \{T_2\}$ = $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (A)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (A)}$

$\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (A)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (A)}$ = $\overrightarrow{R_1}.\left(\overrightarrow{M_2\ (B)} + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{R_2}.\left(\overrightarrow{M_1\ (B)} + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{BA}\right)$

= $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (B)} + \overrightarrow{R_1}\left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (B)} + \overrightarrow{R_2}\left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{BA}\right)$

= $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (B)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (B)} + \overrightarrow{R_1}\left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \left[-\overrightarrow{R_1}\left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{BA}\right)\right]$ *(produit mixte)*

$\{T_1\} \otimes \{T_2\}$ = $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (A)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (A)}$ = $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2\ (B)} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1\ (B)}$

Le comoment des deux torseurs ne dépend pas du point de réduction !

Les 3 torseurs particuliers

- Le torseur nul
- Le torseur couple
- Le torseur glisseur

Le torseur nul

- Le torseur nul est noté {0}.
- Ses éléments de réduction sont $\{0\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \forall P$
- Résultante nul et tous les moments nuls : champ nul quoi, que des points !..
- Propriété : élément neutre pour l'addition
- Propriété : Elément absorbant pour l'opération de comoment (c'est l'opération de « produit » des torseurs)

Le torseur couple

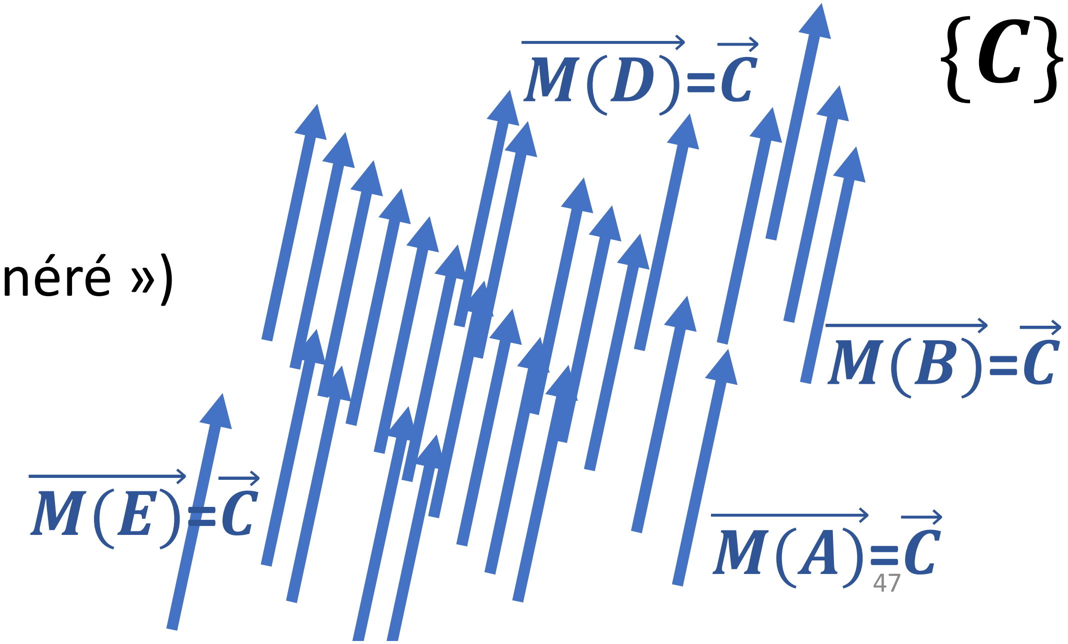
- Torseur à **résultante nulle :** $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}}$
- Les éléments de réduction sont $\{T\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{0}} \\ \overrightarrow{M(P)} \end{Bmatrix}$
- Le champ de moment est … constant !

Démonstration : $\overrightarrow{M(Q)} = \overrightarrow{M(P)} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{M(P)} + \vec{0} \wedge \overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{M(Q)} = \overrightarrow{M(P)} \quad \forall \boldsymbol{P}$!

- Souvent on écrit $\{T\} = {}_*\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}$
- Et l'axe central ? y en a pas ! (Torseur « dégénéré »)
- On pourrait toutefois

parler de « direction centrale »



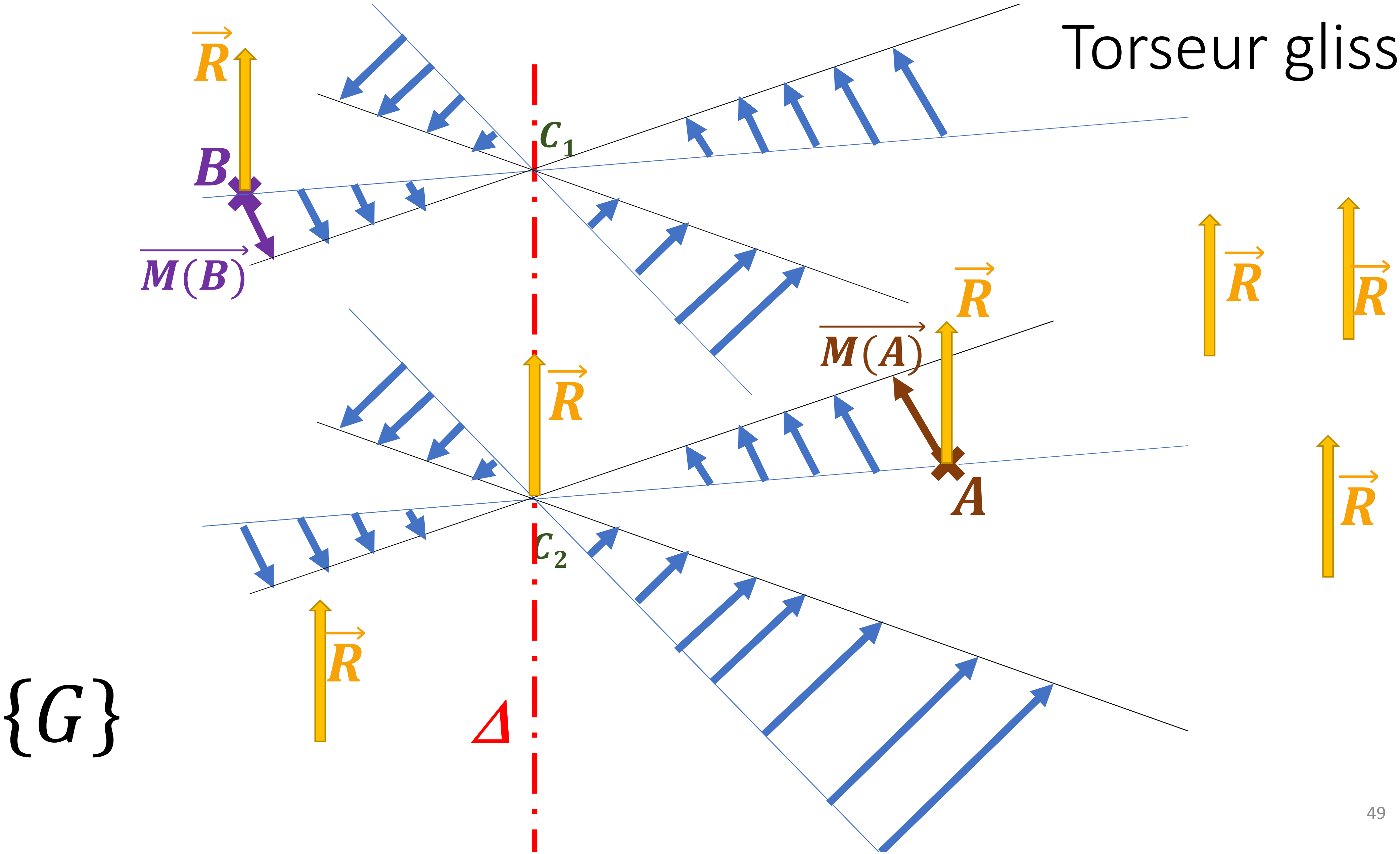
Le torseur glisseur

- Son moment central est nul : $\overrightarrow{M(C)} = \vec{0}$ où ***C* est un point central**
- En un point central, un glisseur $\{G\}$ a donc pour éléments de réduction :

$\{G\}$: $_C\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ où *C* est un point central du torseur glisseur $\{G\}$.

- DONC, ATTENTION, un glisseur non exprimé en un point central a des éléments de réduction quelconques en apparence, $\{G\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M(A)}\end{Bmatrix}$ avec A non central et $\overrightarrow{M(A)} \neq \vec{0}$
- Conclusion : un glisseur ne se voit pas au premier coup d'œil en observant ses éléments de réduction (pas comme le torseur Couple qui est immédiatement identifiable).
- Propriété : un torseur $\{G\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M(A)}\end{Bmatrix}$, est glisseur si et seulement si on a : $\overrightarrow{M(A)}.\vec{R} = 0$

Torseur glisseur



FIN