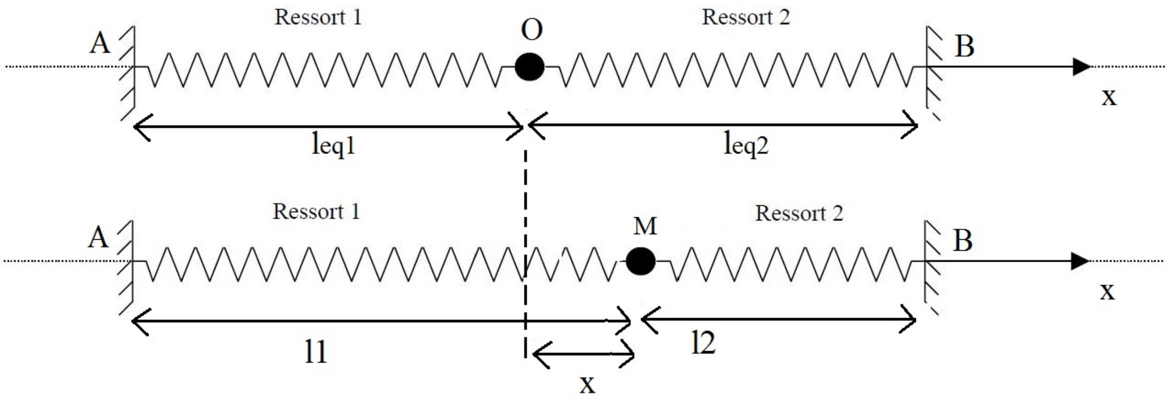
Devoir maison 1 – À rendre le 4 novembre 2024

Analogies électromécaniques – corrigé

I Analogies électromécaniques

I/A Oscillateur mécanique



1)

Bilan des forces :

- ◇ Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est la verticale ascendante
- ◇ La réaction du support $\vec{R} = R\vec{u_z}$ puisqu'il n'y a pas de frottements avec le support
- ◇ La force de rappel élastique exercée par le ressort 1 : $\vec{F_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}_x$
  et la force de rappel exercée par le second ressort : $\vec{F_2} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}_x$

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

Or, on a $\vec{OM} = x\vec{u_x}$, d'où $\vec{v} = \dot{x}\vec{u_x}$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x}$.

Ainsi, en projection sur $\vec{u_x}$, il vient $m\ddot{x} = k(\ell_2 - \ell_0) - k(\ell_1 - \ell_0)$. Or, à l'équilibre, on a $0 = k(\ell_{2_{eq}} - \ell_0) - k(\ell_{1_{eq}} - \ell_0)$ d'où en soustrayant ces 2 équations :

$$m\ddot{x} = k(\ell_2 - \ell_{2_{eq}}) - k(\ell_1 - \ell_{1_{eq}})$$

Or, on voit sur le schéma que $\ell_1 - \ell_{1_{eq}} = x$ et $\ell_2 - \ell_{2_{eq}} = -x$. On a donc finalement :

$$m\ddot{x} = -2kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Autre possibilité : Identifier sur le schéma que $L = 2\ell_{eq}$ par symétrie et directement appliquer le PFD.

2) On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et donc de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

3) Les solutions de cette équation différentielles sans second membre sont $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Or, à $t = 0$, on a $x(0) = x_0$ d'un part et $x(0) = A$ d'autre part. On en déduit $A = x_0$. De plus, $\dot{x}(0) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ d'où $\dot{x}(0) = B\omega_0$ d'un part, et d'après la condition initiale, $\dot{x}(0) = 0$. Il vient donc $B = 0$ et finalement :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$$

4) On a $\mathcal{E}_{p1} = \frac{1}{2}k(x + \ell_{eq} - \ell_0)^2$ et $\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2}k(L - \ell_{eq} - x - \ell_0)^2$.

De plus : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Il suffit ensuite de remplacer x et $\dot{x}$ par leurs expressions respectives. On remarque au passage que l'énergie mécanique se conserve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p1} + \mathcal{E}_{p2} + \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}k[(x+\Delta)^2 + (x-\Delta)^2] + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\
&= k\Delta^2 + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}\right) \\
&= k\Delta^2 + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2 x_0^2\left(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)}_{=1}\right) \\
&= k\Delta^2 + k{x_0}^2 = \text{cte}
\end{aligned}$$

avec $\Delta = \ell_{eq} - \ell_0$, l'écart entre longueur à vide et longueur à l'équilibre pour les deux ressorts. On retrouve ainsi une énergie mécanique constante pour l'évolution de ce système, en accord avec l'absence de forces non conservatives.

5) On ajoute au bilan la force $\vec{f} = -\mu\vec{v} = -\mu\dot{x}$. Ainsi, il vient :

$$m\ddot{x} = k(\ell_2 - \ell_0) - k(\ell_1 - \ell_0) - \mu\dot{x}$$

Or, à l'équilibre, on a toujours $0 = k(\ell_{2_{eq}} - \ell_0) - k(\ell_{1_{eq}} - \ell_0)$. Après soustraction et remise en forme, on a donc :

$$m\ddot{x} = -2kx - \mu\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \tag{.1}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{.2}$$

6) Pour que le mouvement soit oscillatoire amorti, il faut que l'on soit en régime pseudo-périodique, il faut donc que les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle soient complexes. Or, ce polynôme s'écrit : $r^2 + hr + \omega_0^2 = 0$

On doit donc avoir : $\Delta = h^2 - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow h^2 < 4\omega_0^2 \Rightarrow h < 2\omega_0$

En réinjectant les expressions de h et ω_0, cela donne :

$$\frac{\mu}{m} < 2\sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow \mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

7) On calcule les racines complexes :

$$r = -\frac{h}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - h^2} = -\frac{h}{2} \pm j\ \frac{1}{2}\ 2\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}$$

On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}$, d'où $r = -\frac{h}{2} \pm j\Omega$ et $x(t)$ s'écrit alors :

$$x(t) = e^{-\frac{h}{2}t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

8) La pseudo-période T est :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}}$$

9) Initialement, l'énergie mécanique de l'oscillateur est sous forme potentielle puisqu'il a été écarté de sa position d'équilibre.

Au cours du mouvement, l'énergie mécanique est convertit sous forme cinétique et inversement, ce qui crée le mouvement oscillatoire, mais une partie de cette énergie est dissipée par frottement, ce qui fait que l'amplitude des oscillations diminue au cours du mouvement.

I/B Oscillateur électrique

10) On a $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{q(t)^2}{2C} + \frac{Li(t)^2}{2}$ car $q = Cu$

11) On peut démontrer la formule du bilan de puissance à partir de la loi des mailles (toutes les tensions sont prises en convention récepteur) : $U_R + U_C + U_L = 0 \Rightarrow U_R i + U_C i + U_L i = 0$ soit au final $P_R + P_L + P_C = 0$ et donc :

$$P_L + P_C = -P_R = -ri^2 \tag{.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2 \tag{.4}$$

D'où le résultat. L'énergie magnétique du circuit diminue à cause la la puissance dissipée par effet Joule.

12)

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2C}2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}q + \frac{L}{2}2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = i\left(\frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

En injectant dans l'équation précédente, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2 = i\left(\frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

On peut simplifier cette equation par le courant i en supposant qu'il existe au moins au instant ou il est non nul :

$$-r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$, il vient au final :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0$$

13) Pour qu'il y ait des oscillations amorties, il faut (cf partie précédente) :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q_0^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2\left(\frac{1}{Q_0^2} - 4\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q_0^2} < 4 \quad \Rightarrow \quad Q_0 > \frac{1}{2}$$

14) Les racines du polynôme caractéristique sont $r = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q_0^2}}}{2}$ et on pose :

$$\Omega = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q_0^2}}}{2} = \frac{2\omega_0}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}$$

On a alors $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q_0^2}}}$

Comme $1 - \frac{1}{4Q_0^2} < 1$, on a $T > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Remarque :

Il est malheureusement commun d'oublier que $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Pour rappel, cette relation s'apparente à la formule $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$ pour une vitesse constante : ici, la vitesse de variation de la phase (la pulsation) correspond au parcours d'une phase de $\Delta\varphi = 2\pi$ en un temps T égal à une période. On retrouve donc la formule $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ainsi, on a dans le cas des oscillations amorties $\Omega \neq \omega_0$ donc $T \neq T_0$.

I/C Analogie électromécanique

15) On a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0 \tag{.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{2k}{m}x = 0 \tag{.6}$$

on peut donc procéder par identification :

- ◇ coefficient de rappel élastique k : inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
- ◇ masse du mobile m : inductance L
- ◇ coefficient de frottement fluide μ : résistance r
- ◇ coordonnée de position x : charge q
- ◇ vitesse du mobile v : intensité i

Pour les énergies, il suffit de combiner les résultats précédents :

- ◇ énergie cinétique du mobile $\frac{1}{2}mv^2$: énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$
- ◇ énergie potentielle élastique du ressort : énergie électrostatique du condensateur
- ◇ puissance dissipée par frottements : puissance dissipée par effet Joule