MPSI3 – 22 novembre 2024 – Devoir surveillé 3

Correction du DS

/31 E1 Synthèse de l'ammoniac *(CCP TSI 2013)*

/5 **1** On dresse le tableau d'avancement :

Équation 1+1		$N_{2(g)}$	+ $3H_{2(g)}$	= $2NH_{3(g)}$	$n_{tot,gaz}$ 1	
Initial	$\xi = 0$	n_0	$3n_0$	0	$4n_0$	1
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	$3n_0 - 3\xi$	2ξ	$4n_0 - 2\xi$	1
Équilib.	ξ	$n_0(1-\rho)$	$3n_0(1-\rho)$	$2\rho n_0$	$2n_0(2-\rho)$	+1 Q2

/4 **2** On cherche ξ_{max} : les réactifs étant introduits dans les proportions stœchiométriques, on trouve ξ_{max} à partir de l'un des deux réactifs :

$$n_0 - \xi_{max} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi_{max} \overset{1}{=} n_0}$$

Ainsi,

$$\rho \overset{1}{=} \frac{\xi_{eq}}{\xi_{max}} \Leftrightarrow \boxed{\rho \overset{1}{=} \frac{\xi_{eq}}{n_0}}$$

d'où la dernière ligne du tableau précédent.

/6 **3**

$$Q_r \overset{1}{=} \frac{a(NH_3)^2}{a(N_2)a(H_2)^3}$$

$K^\circ \overset{1}{=} Q_{r,eq}$

$$\Rightarrow K^\circ = \frac{a(NH_3)^2_{eq}}{a(N_2)_{eq}a(H_2)^3_{eq}}$$

$a(X_{(g)}) \overset{1}{=} \frac{P_X}{P^\circ}$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ \overset{1}{=} \frac{P(NH_3)^2_{eq}(P^\circ)^2}{P(N_2)_{eq}P(H_2)^3_{eq}}}$$

Loi de Dalton :

$$P(NH_3)_{eq} \overset{1}{=} \frac{n(NH_3)_{eq}}{n_{tot}} \times P$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ \overset{1}{=} \frac{n(NH_3)^2_{eq}n^2_{tot}}{n(N_2)_{eq}n(H_2)^3_{eq}} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2}$$

/2 **4** On injecte les expressions des quantités de matière à l'équilibre :

$$K^\circ \overset{1}{=} \frac{(2n_0\rho)^2\,(2n_0(2-\rho))^2}{n_0(1-\rho)\times(3n_0(1-\rho))^3} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ \overset{1}{=} \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2}$$

/10 **5**

$$K^\circ = \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2$$

$\sqrt{(\cdot)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{K^\circ} \overset{1}{=} \frac{4\rho(2-\rho)}{3\sqrt{3}(1-\rho)^2}\,\underbrace{\frac{P^\circ}{P}}_{=1/300}$$

On rassemble

$$\Leftrightarrow 300\sqrt{K^\circ}\cdot 3\sqrt{3}(1-\rho)^2 \overset{1}{=} 4\rho(2-\rho)$$

On développe

$$\Leftrightarrow 900\sqrt{3K^\circ}(1-2\rho+\rho^2) \overset{1}{=} 8\rho - 4\rho^2$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \rho^2(900\sqrt{3K^\circ}+4) - 2\rho(900\sqrt{3K^\circ}+4) + 900\sqrt{3K^\circ} \overset{1}{=} 0$$

On identifie

$$\Leftrightarrow \boxed{C\rho^2 - 2C\rho + C - 4 = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{C \overset{1}{=} 900\sqrt{3K^\circ}+4}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4C^2 - 4C(C-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta = 16C}$$ ①

soit $\rho_\pm = \dfrac{2C \pm 4\sqrt{C}}{2C}$ ①

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_\pm = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{C}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 900\sqrt{3K^\circ} + 4 \\ K^\circ = 2{,}8 \times 10^{-5} \end{cases}$$ ①

A.N. : $\underline{\rho_+ = 1{,}57}$ ou $\underline{\rho_- = 0{,}43}$ ①

Le rendement ne pouvant être supérieur à 1, on obtient alors $\boxed{\rho = 0{,}43}$ ①

/3 [6] En diminuant P, on augmente le quotient réactionnel ① par rapport à une situation d'équilibre où $Q = K^\circ$. La température étant constante, la constante d'équilibre reste la même ①. Donc $Q > K^\circ$, donc la réaction évolue dans le sens indirect ce qui a pour effet de diminuer le rendement. ①

/38 E2 Réaction du dibromure de cuivre

/4 [1] Il est indiqué que les mesures sont effectuées avec un excès de $CuBr_2$, qui est donc encore présent à la fin de la réaction. Il s'agit donc d'un état d'équilibre, et on donc appliquer la loi d'action des masses :

$$K^\circ = Q_{r,\text{eq}}$$ ①

$$\Leftrightarrow K^\circ = \frac{a_{\text{BR}_2,\text{eq}} \cdot a^2_{\text{CuBr,eq}}}{a_{\text{CuBr}_2,\text{eq}}}$$ ①

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ = \frac{p_{\text{Br}_2,\text{eq}}}{p^\circ}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{\text{Br}_2,\text{eq}} = 52{,}6 \times 10^{-3}\,\text{bar} \\ p^\circ = 1\,\text{bar} \end{cases}$$ ①

A.N. : $\underline{K^\circ = 52{,}6 \times 10^{-3}}$ ①

/13 [2] On suppose un état d'équilibre. La pression finale vaut alors 52,6 mbar d'après le tableau de valeurs. On peut en déduire la quantité de dibrome formé, et donc l'avancement grâce à un tableau :

Équation ①+①		$2CuBr_{2(s)}$	$=$ $2CuBr_{(s)}$	$+$ $Br_{2(g)}$	
Initial	$\xi = 0$	n_1	0	0	①
Final	ξ_f	$n_1 - 2\xi_f$	$2\xi_f$	ξ_f	①
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{\max}$	0	2,00	1,00	①

Ainsi, on trouve

$$n_{\text{Br}_2,eq} = \boxed{\xi_{\text{eq}} = \frac{P_{\text{eq}}V}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_{\text{eq}} = 52{,}6 \times 10^2\,\text{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \\ R = 8{,}314\,\text{J·K}^{-1}\text{·mol}^{-1} \\ T = 473\,\text{K} \end{cases}$$ ①

A.N. : $\underline{\xi_{\text{eq}} = 1{,}34\,\text{mmol}}$ ①

Or, on trouve facilement l'avancement maximal :

$$n_1 - 2\xi_{\max} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi_{\max} = \frac{n_1}{2}} \Rightarrow \underline{\xi_{\max} = 1{,}00\,\text{mmol}} < \xi_{\text{eq}}$$ ① ①

Ainsi, $\boxed{\xi_f = \xi_{\max}}$ ① **rupture d'équilibre** ①

On complète alors la dernière ligne du tableau. Quant à la pression, on la calcule avec la quantité de dibrome à l'état final, $n_{\text{Br}_2,f} = 1{,}00\,\text{mmol}$:

$$\boxed{P_f = \frac{n_{\text{Br}_2,f}RT}{V}} \Rightarrow \underline{P_f = 3{,}9 \times 10^{-2}\,\text{bar}}$$ ① ①

/2 [3] a – Le système était en rupture d'équilibre. L'ajout de réactif va donc entraîner l'évolution en sens direct ①, et selon la quantité ajoutée le système peut aboutir à une nouvelle rupture d'équilibre ou à un état d'équilibre. ①

/1 b – Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. ①

/1 c – Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. ①

/6 [4] De la même manière que précédemment, on a ξ_{eq} inchangé ①, seulement on trouve $\xi_{\max} = 5{,}00\,\text{mmol} > \xi_{\text{eq}}$ ① ; ainsi $\xi_f = \xi_{\text{eq}}$ ①, on atteint donc un **état d'équilibre** ① et on peut compléter le tableau d'avancement :

Équation		$2CuBr_{2(s)}$	$=$ $2CuBr_{(s)}$	$+$ $Br_{2(g)}$
Initial	$\xi = 0$	n_2	0	0
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{eq}$	7,32	2,68	1,34

1

On a alors
$$\boxed{P_f = P_{eq}} \Rightarrow \underline{P_f \overset{1}{=} 52{,}6\,\text{mbar}}$$

/1 $\boxed{5}$ a – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. 1

/1 b – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. 1

/2 c – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant gazeux augmente le quotient de réaction 1. Celui-ci devient donc plus grand que la constante d'équilibre, et il y a alors **évolution en sens indirect**. 1

/7 $\boxed{6}$ Pour un excès de $CuBr_2$, l'état final sera un état d'équilibre donc la pression sera constante, avec
$$P_f = K^\circ P^\circ \quad 1$$
En revanche, si $CuBr_2$ est en défaut, il y a rupture d'équilibre, et on aura
$$n_{Br_2,f} = \xi_{max} \overset{1}{=} \frac{n_0}{2} \Rightarrow P_f \overset{1}{=} \frac{n_0 RT}{2V}$$
La limite de défaut/excès de $CuBr_2$ est trouvée lorsque la quantité introduite permet tout juste d'atteindre l'état d'équilibre tout en ayant donc la pression maximale ; soit V_{lim} le volume limite, on a alors
$$\frac{n_0 RT}{2V_{lim}} \overset{1}{=} K^\circ P^\circ \Leftrightarrow \boxed{V_{lim} \overset{1}{=} \frac{n_0 RT}{2K^\circ P^\circ}}$$
D'où le graphique :

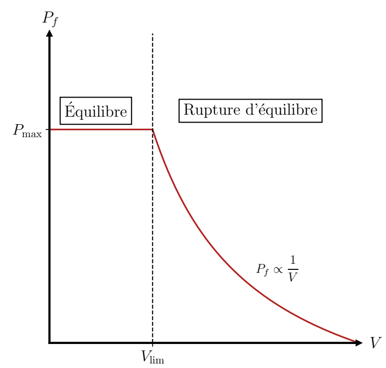


FIGURE 3.1 – Tracé $P_f = f(V)$. 1 + 1

/29 E3 RLC échelon montant

/5 $\boxed{1}$ Intéressons-nous d'abord au circuit à $t < 0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc
$$u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \; 1$$
De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc
$$u_C\left(t = 0^+\right) = u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \; 1$$
Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil) 1. Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E. Ainsi avec une loi des mailles et loi d'OHM :
$$i\left(t = 0^-\right) = E/R \; 1$$
De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc
$$i\left(t = 0^+\right) = i\left(t = 0^-\right) = \frac{E}{R} \; 1$$
Réponses $\boxed{B}$ et $\boxed{C}$.

/6 $\boxed{2}$ On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t > 0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C(t)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$\begin{aligned} u_L + u_R &= u_C \overset{1}{=} E \\ \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C &\overset{1}{=} E \\ \Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C &\overset{1}{=} E \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C &\overset{1}{=} \frac{E}{LC} \end{aligned}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_R = Ri$

$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

forme canonique

Par identification, on a alors :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Réponses $\boxed{\text{A}}$ et $\boxed{\text{D}}$.

/1 $\boxed{3}$ En poursuivant l'identification : $\boxed{\alpha = \frac{E}{LC} \overset{1}{=} \omega_0{}^2 E}$ Réponse $\boxed{\text{D}}$

/2 $\boxed{4}$ La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q > 1/2$ (précisément, c'est pour $Q = 0{,}72$ (1)). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notons en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit. (1) Réponse $\boxed{\text{D}}$.

/2 $\boxed{5}$ On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

$$\boxed{R \overset{1}{=} \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow \underline{R = 5\,\Omega} \ (1)$$

Réponse $\boxed{\text{C}}$.

/6 $\boxed{6}$ Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0{}^2 \overset{1}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0{}^2 \overset{1}{=} \omega_0{}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \overset{1}{<} 0$$

car $$Q = 10 > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Que l'on identifie en cohérence avec $u_C(t)$:

$$r_\pm \overset{1}{=} -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{1}{=} \frac{2Q}{\omega_0}}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/1 $\boxed{7}$ De même, par identification, $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \overset{1}{=} \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Réponse $\boxed{\text{A}}$.

/1 $\boxed{8}$ $u_{C,p}$ est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2}}_{=0} + \frac{\omega_0}{Q}\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \omega_0{}^2u_{C,p}(t) = \omega_0{}^2E \Leftrightarrow \boxed{u_{C,p} \overset{1}{=} E}$$

Réponse $\boxed{\text{A}}$

/1 $\boxed{9}$ Exprimons la constante d'intégration A à l'aide des conditions initiales déterminées à la question $\boxed{1}$:

$$u_C(t = 0^+) = 0 = \exp(-0/\tau)\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] + E \Leftrightarrow \boxed{A \overset{1}{=} -E}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/5 $\boxed{10}$ D'après $\boxed{1}$, on a aussi $i(t = 0^+) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \frac{i\,(t=0^+)}{C} \overset{1}{=} \frac{E}{RC}$$

Or,
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} -\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \Omega \times \mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} \overset{1}{=} -\frac{A}{\tau} + \Omega B = \frac{E}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \Omega B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)} \quad A = -E \quad \text{Réponse A}$$

De plus, $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{L}{R}} \times \sqrt{LC} \Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{1}{=} \dfrac{2L}{R}}$

Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.

/60 P1 Décrément logarithmique électrique

/4 **1** R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2.

De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension 1 avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) \overset{1}{=} u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

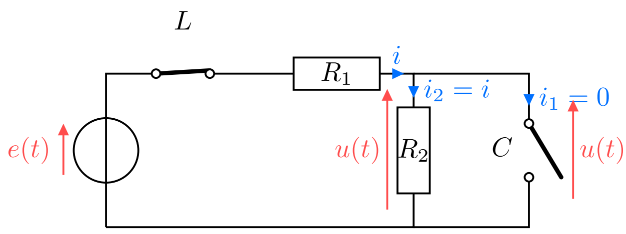


Figure 3.2 – Schéma équivalent. 1+1

/8 **2** Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i \overset{1}{\underset{1}{=}} E$$

Avec la loi des nœuds :

$$i \overset{1}{=} i_1 + i_2 \overset{1}{=} C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$

On combine :

$$\Rightarrow u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E$$

$$\Leftrightarrow u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E$$

$$\Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \cancel{1}_{\frac{R_2}{R_2}}\right)u \overset{1}{=} E$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} \overset{1}{=} \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty}$$

avec $\boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\right)}}$ et $\boxed{\lambda \overset{1}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_2C} + \dfrac{R_1}{L}\right)}$

/10 **3** Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ 1 la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0 \Rightarrow \Delta \overset{1}{=} 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ 1 puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm \overset{1}{=} -\lambda \pm \mathrm{j}\Omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega \overset{1}{=} \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$ 1, on aura la forme générale

$$u(t) \overset{1}{=} u_h(t) + u_p \Leftrightarrow \boxed{u(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + u_\infty}$$

/10 4

En $t = 0^-$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $\boxed{u(0^-) = 0}$ ①, et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $\boxed{i(0^-) = 0}$ ①.

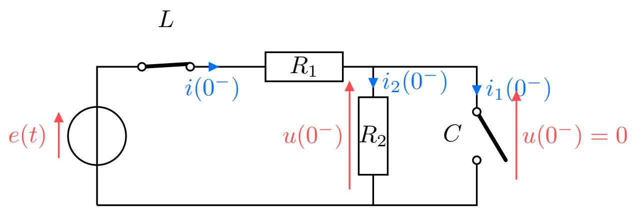


Figure 3.3 – Schéma en $t = 0^-$. ①

En $t = 0^+$

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur ①, lors de l'échelon de tension on garde $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ ① et $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ ①.

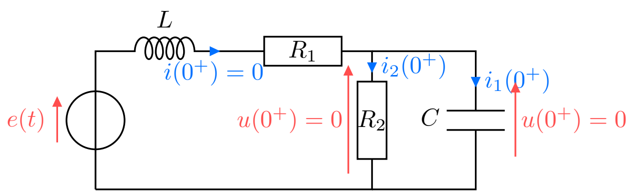


Figure 3.4 – Schéma en $t = 0^+$. ①

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$ ①. Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ ①, soit avec la loi des nœuds, $\boxed{i_1(0^+) = 0 \overset{①}{=} C \left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+}}$.

/3 5

Première condition

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow \boxed{A \overset{①}{=} -u_\infty}$$

Seconde condition

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B \overset{①}{=} \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega}}$$

Finalement,
$$\boxed{u(t) \overset{①}{=} u_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)}$$

/4 6 On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow \boxed{T \overset{①}{=} \frac{t_3 - t_1}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 \overset{①}{=} 0{,}95 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ t_1 \overset{①}{=} 0{,}19 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{T \overset{①}{=} 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$

/4 7 On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u(t_1) - u_\infty}{u(t_3) - u_\infty}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) \overset{①}{=} 4{,}9\,\mathrm{V} \\ u(t_3) \overset{①}{=} 3{,}3\,\mathrm{V} \\ u_\infty \overset{①}{=} 3{,}0\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{\delta \overset{①}{=} 0{,}92}$$

/5 8 Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t + nT) - u_\infty \overset{①}{=} \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\underbrace{\cos(\Omega t + n\Omega t)}_{=\cos \Omega t} + B\underbrace{\sin(\Omega t + n\Omega t)}_{=\sin \Omega t}\right)}_{u(t) - u_\infty ①}$$

Ainsi,
$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} \overset{①}{=} \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln(\mathrm{e}^{\lambda nT})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda \overset{①}{=} \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0{,}92 \\ T = 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{\lambda \overset{①}{=} 2{,}3 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$$

/2 9 On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C \overset{1}{=} \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\ R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega} \\ L = 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda = 2{,}3 \times 10^3\,\mathrm{s^{-1}} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{C \overset{1}{=} 7{,}6\,\mathrm{nF}}$$

/52 P2 Mouvements d'une plateforme *offshore* (*CCP modélisation 2019*)

/8 1

1 ◇ Système : la plateforme M de masse m.

1 ◇ Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.

1 ◇ Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. $\overrightarrow{u_y}$ est orienté vers le haut.

1 ◇ Repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$.

◇ Bilan des forces :

1 1) Poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;

1 2) Réaction du support : $\overrightarrow{R_N} = R_N\,\overrightarrow{u_y}$;

1 3) Force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$, car $\ell = \ell_0 + x$;

1 4) Force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\overrightarrow{v} = -\gamma\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$

/5 2

$$\sum \overrightarrow{F} \overset{1}{=} m\overrightarrow{a}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_d} = m\overrightarrow{a}$$

Sur $\overrightarrow{u_x}$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} \overset{1}{=} 0$$

Forme canonique

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} \overset{1}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{avec} \quad \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 a = \frac{\gamma}{m}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\xi \overset{1}{=} \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}}$$

/7 3 On injecte la forme générique $x(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ 1 pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0\,r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 4\xi^2\,{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 \overset{1}{=} 4{\omega_0}^2(\xi^2 - 1)$$

Or, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$ 1 ; ainsi

$$r_{1,2} \overset{1}{=} \frac{-2\xi\omega_0 \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$
$$\Leftrightarrow r_{1,2} = -\omega_0\xi \pm \mathrm{j}\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}_{=\Omega\,1}$$

En réinjectant dans la forme générique, on trouve donc une exponentielle réelle décroissante multipliée à une exponentielle complexe oscillante, qu'on écrit

$$x(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos\Omega t + B\sin(\Omega t)]$$

/4 4 De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. 1 Calculons de plus la dérivée :

$$\dot{x}(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)] - \xi\omega_0\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

Or $\dot{x}(0) = v_0$ soit
$$B\Omega - \xi\omega_0 A \overset{1}{=} v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\Omega} \Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

/7 5 On nous donne
$$x(t) = X_m\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)$$
et
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
soit
$$x(t) \overset{1}{=} X_m\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[\cos(\Omega t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega t)\sin(\varphi)]$$

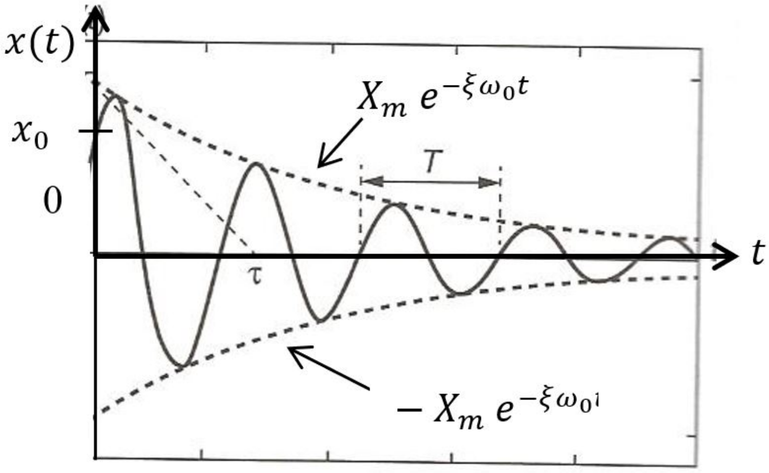
Par identification avec $x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m\cos(\varphi) \overset{1}{=} A \quad \text{et} \quad -X_m\sin(\varphi) \overset{1}{=} B$$

Ainsi $\qquad \tan(\varphi) \overset{1}{=} -\dfrac{B}{A} \quad$ et $\quad A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \overset{1}{=} X_m^2$

D'où $\qquad \boxed{\varphi \overset{1}{=} -\arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)} \quad$ et $\quad \boxed{X_m \overset{1}{=} \sqrt{A^2 + B^2}}$

/4 $\boxed{6}$ Allure du graphe ci-contre. La pente à l'origine est $v_0 \neq 0$.



/1 $\boxed{7}$ À cause des frottements, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t.

/6 $\boxed{8}$ Cela fait penser au décrément logarithmique :

$$\delta = \ln \frac{x\,(t)}{x\,(t+T)} = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{1}{=} \ln\left(\frac{X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)}{X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 (t+T)}\cos(\Omega(T+t) + \varphi)}\right) \overset{1}{=} \ln\left(\mathrm{e}^{\xi\omega_0 T}\right)$$

car cosinus est une fonction périodique de période T. Soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{1}{=} \xi\omega_0 T = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\Omega} = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \boxed{\delta \overset{1}{=} \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1 - \xi^2 \approx 1$ ①; alors

$$\boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{1}{\approx} 2\pi\xi}$$

/10 $\boxed{9}$ On lit $x_1 = 0{,}014\,602\,\mathrm{m}$ et $t_1 = 4{,}004\,004\,\mathrm{s}$, puis $x_2 = 0{,}010\,661\,\mathrm{m}$ et $t_2 = 8{,}008\,008\,\mathrm{s}$. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \overset{1}{\approx} \Omega \overset{1}{=} \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

car $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

$$\boxed{k = m\omega_0^2 \overset{1}{=} m\frac{4\pi^2}{(t_2 - t_1)^2}} \Rightarrow \underline{k \overset{1}{=} 2{,}71 \times 10^5\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$$

et $$\boxed{\xi \overset{1}{=} \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{2\pi}} \Rightarrow \underline{\xi \overset{1}{=} 5{,}01 \times 10^{-2}}$$

On trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$: c'est cohérent.

Enfin, d'après Q1, $$\xi = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}$$

soit $$\boxed{\gamma \overset{1}{=} 2\xi\sqrt{mk}} \Rightarrow \underline{\gamma \overset{1}{=} 1{,}73 \times 10^4\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations ①; la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait. ①