

Correction du TD d'application



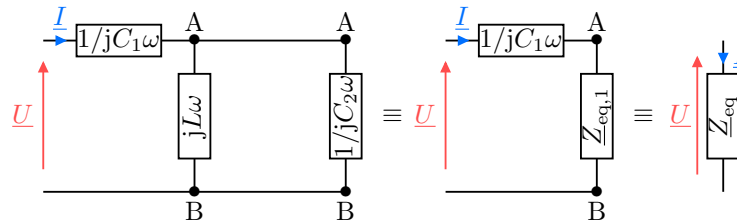
I Impédance équivalente

1) On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

$$\diamond \underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega};$$

$$\diamond \underline{Z}_L = jL\omega;$$

$$\diamond \underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega}.$$



On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C_2 . Avec les admittances, on a

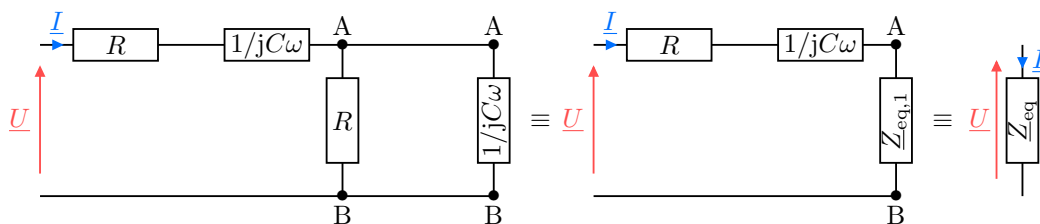
$$\underline{Y}_{\text{eq},1} = \underline{Y}_{C_2} + \underline{Y}_L \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq},1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{jC_2\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

Il suffit alors de faire l'association en série de \underline{Z}_{C_1} et de $\underline{Z}_{\text{eq},1}$:

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

2) Ici, on utilise que $\underline{Z}_R = R$ et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des R et C de droite avant de faire l'association en série de R et C de gauche avec cette impédance équivalente :



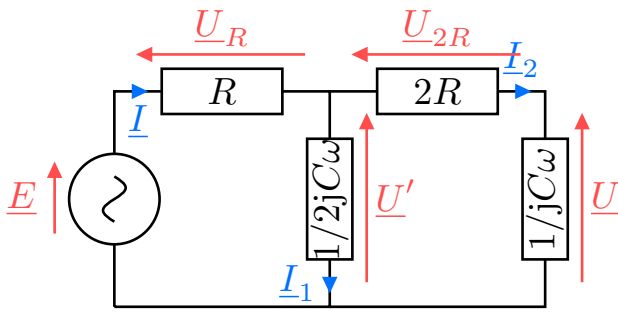
$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Et on a donc finalement

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

II Obtention d'une équation différentielle

1)



On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'OHM généralisée :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R}U_R &= \frac{1}{Z_{2C}}U' + \frac{1}{Z_C}U \\ \Leftrightarrow U_R &= 2jRC\omega U' + jRC\omega U \end{aligned} \quad (6.1)$$

On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$U' = U + 2RI_2 = U + 2jRC\omega U \quad \text{et} \quad U_R = E - U' = E - U - 2jRC\omega U$$

On regroupe les équations dans (6.1) et on introduit $\tau = RC$:

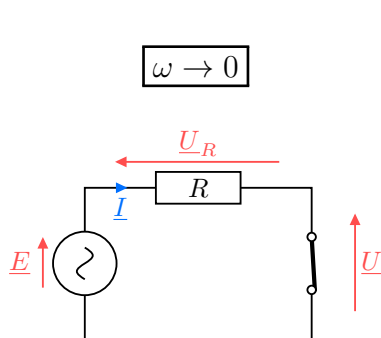
$$\begin{aligned} E - U - 2j\omega\tau U &= j\omega\tau (U + 2j\omega\tau U) + j\omega\tau U \\ \Leftrightarrow E &= U + 5j\omega\tau U + 4\tau^2(j\omega)^2 U \end{aligned}$$

En identifiant les puissances de $j\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

$$e(t) = u(t) + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2}$$

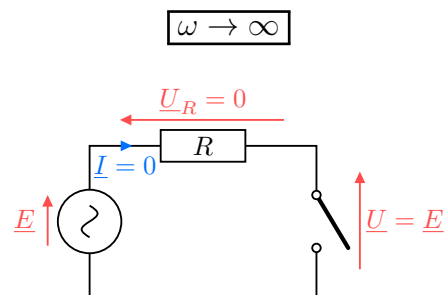
III Circuit RL série en RSF

- 1) Pour les comportements limites, on utilise la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que $Z_L = jL\omega$, pour $\omega \rightarrow 0$ on a $Z_L = 0$, et pour $\omega \rightarrow \infty$ on a $Z_L \rightarrow \infty$. On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).



Or, la tension d'un fil est nul, donc

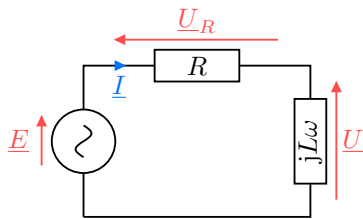
$$u \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$



Le courant ne peut traverser un interrupteur, donc en faisant la loi des mailles dans le circuit équivalent, on a $u_R = Ri = 0$, et forcément

$$u \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} E$$

2)



Pour cela, on utilise la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} E \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E$$

- 3) La phase de $e(t)$ est nulle par construction. On calcule donc la phase de u en prenant l'argument de son amplitude complexe :

$$\arg(\underline{U}) = \arg(jL\omega E) - \arg(\underbrace{R + jL\omega}_{\text{Re} > 0}) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

où on peut prendre l'arctangente parce que la partie réelle est positive. Ainsi :

- 1) Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

- 2) Signaux en opposition de phase

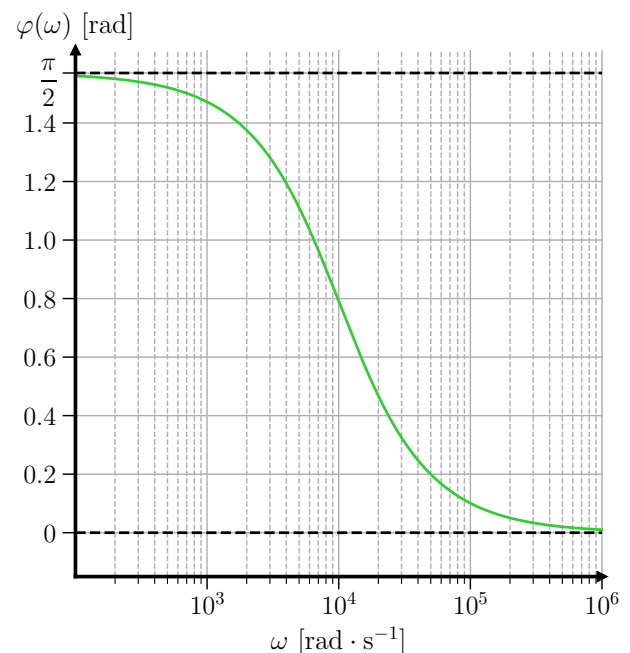
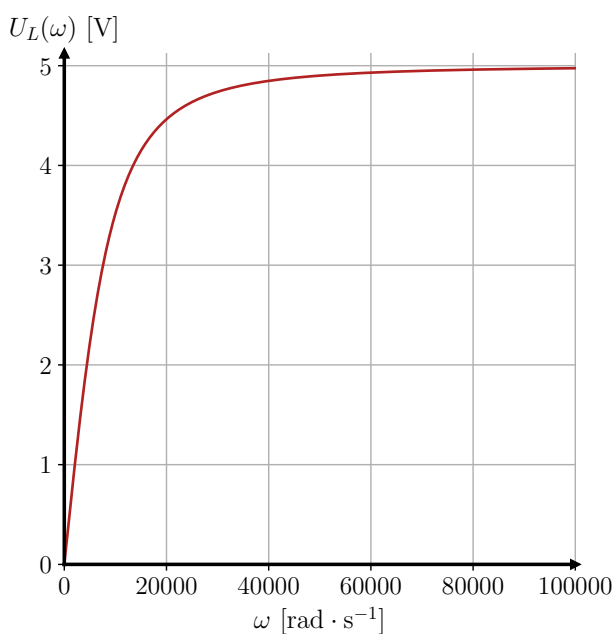
$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow -\infty}$$

C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

- 3) Signaux en quadrature de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.



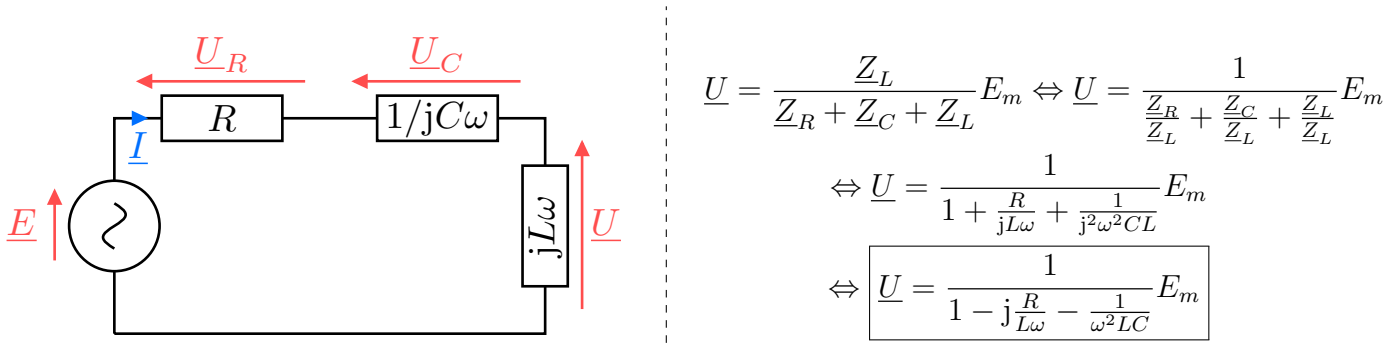
★☆☆ IV Exploitation d'un oscillogramme en RSF

- 1) On lit l'amplitude de $e(t)$ à son maximum pour avoir $E_m = 10 \text{ V}$. On lit l'amplitude de $u(t)$ à son maximum pour avoir $U_m = 6 \text{ V}$. Pour la phase à l'origine des temps, on regarde le signal à $t = 0$: on lit $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3 \text{ V}$, soit

$$\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = -3 \text{ V} \\ U_m = 6 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

- 2) On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :



On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow U_m = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\arg(E)}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right) = -\psi$$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si $\omega^2 > \frac{1}{LC}$). Pour faciliter l'étude de l'argument, notons $\psi = \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right)$. On alors :

$$\boxed{\omega \rightarrow 0}$$

$$\begin{cases} \text{Re}(\psi) \rightarrow -\infty < 0 \\ \text{Im}(\psi) \rightarrow -\infty < 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

$$\begin{cases} \text{Re}(\psi) \rightarrow 1 > 0 \\ \text{Im}(\psi) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

On détermine les valeurs limites en étudiant $\tan(\psi)$:

$$\tan(\psi) = -\frac{R}{L\omega} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\boxed{\omega \rightarrow 0}$$

$$\tan(\psi) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\pi}$$

$$\boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

$$\tan(\psi) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0}$$

Ainsi, on a les résultats opposés pour $\varphi = -\psi$:

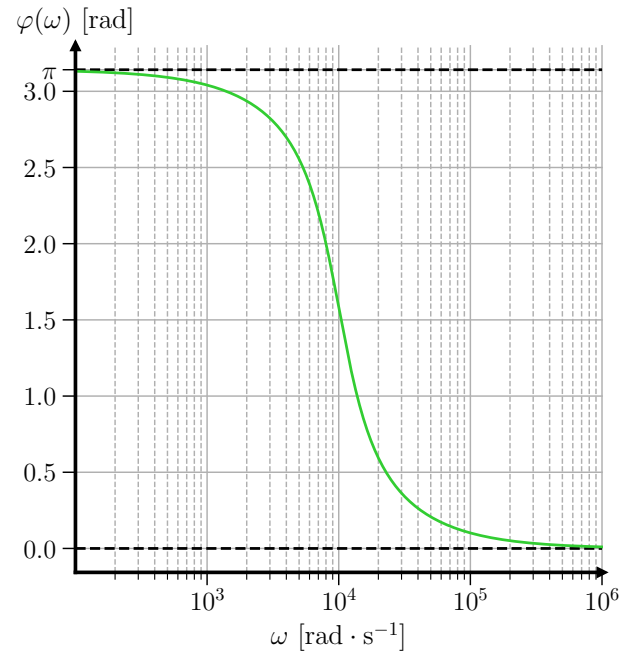
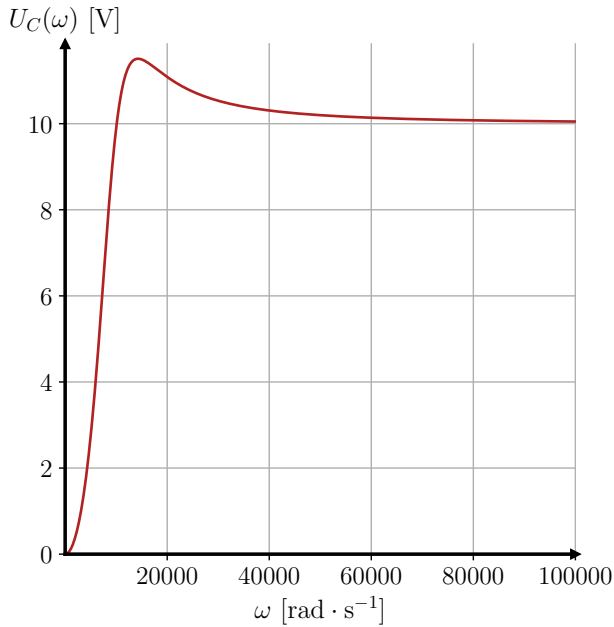
$$\boxed{\varphi \in]0; \pi[}$$

avec

$$\boxed{\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \pi}$$

et

$$\boxed{\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0}$$



- 3) Il paraît évidemment plus simple de calculer L à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé φ à la première question :

$$LC\omega^2 - 1 = \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 + \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R}{\omega \tan(\varphi)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 0,10 \mu\text{F} \\ \omega = 2\pi f \\ f = 1,2 \times 10^3 \text{ Hz} \\ R = 1 \text{ k}\Omega \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{L = 9,9 \times 10^{-2} \text{ H}}$$