TD application : oscillateurs en RSF

I Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

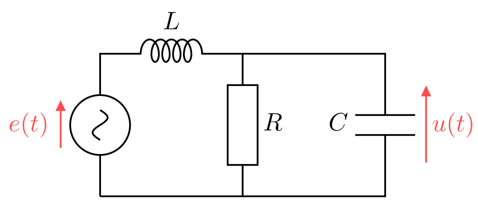
1)
$$\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0 \sin\omega t$$

2)
$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = F_0 \cos\omega t$$

II Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

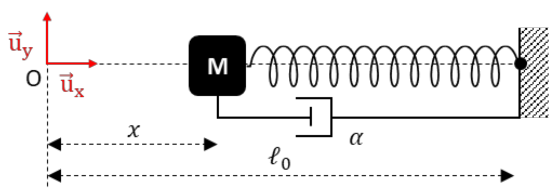


1) Établir l'expression du signal complexe $\underline{u}$ associé à $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E_0, x et ξ.

2) Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.

III Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox). Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut : $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$ où K est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m\cos(\omega t)$.



$m = 10\,\mathrm{g}$, $K = 200\,\mathrm{N{\cdot}A^{-1}}$ et $I_m = 1{,}0\,\mathrm{A}$.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

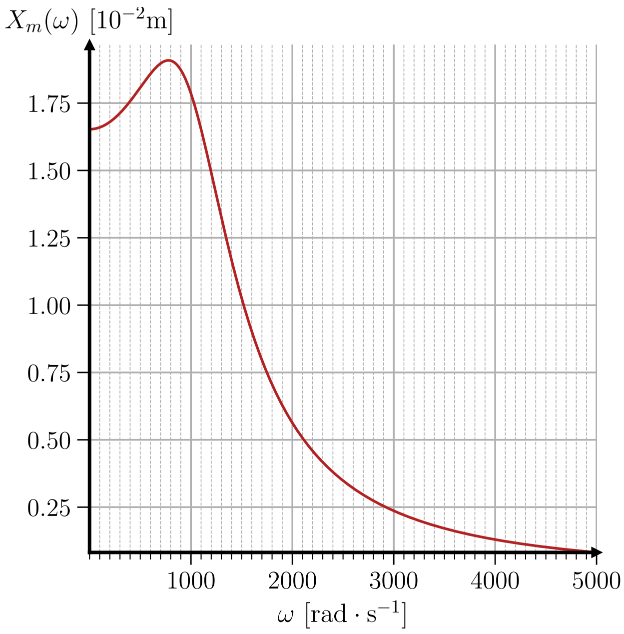
2) La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

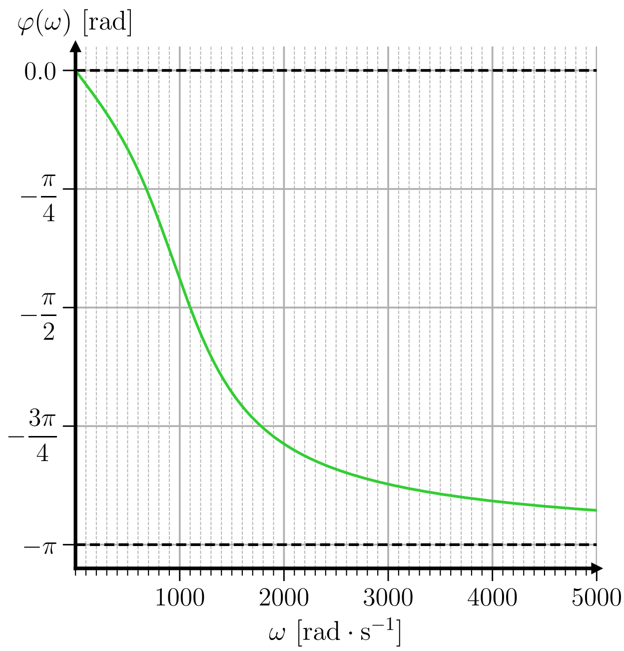
3) Justifier qu'en régime permanent : $x(t) = X_m\cos(\omega t + \phi)$

4) On pose $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$.

5) Exprimer $X_m(\omega)$. Existe-t-il toujours une résonance ?

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.



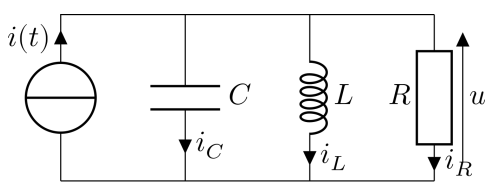


6) Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre ω_0.

IV Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.

1) Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles R,L et C.

2) En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u en fonction de ω, I_0, R, L et C.

3) Pour quelle pulsation l'amplitude réelle U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

4) Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

5) Exprimer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.

6) On se place dans le cas $R = 7\,\Omega$, $L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,$H et $C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,$F. Calculer la valeur de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.