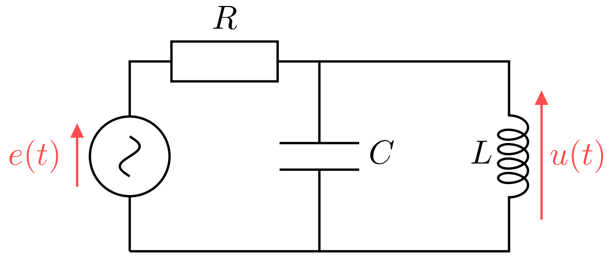
TD entraînement : oscillateurs en RSF

I Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit RLC représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur idéal, de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.

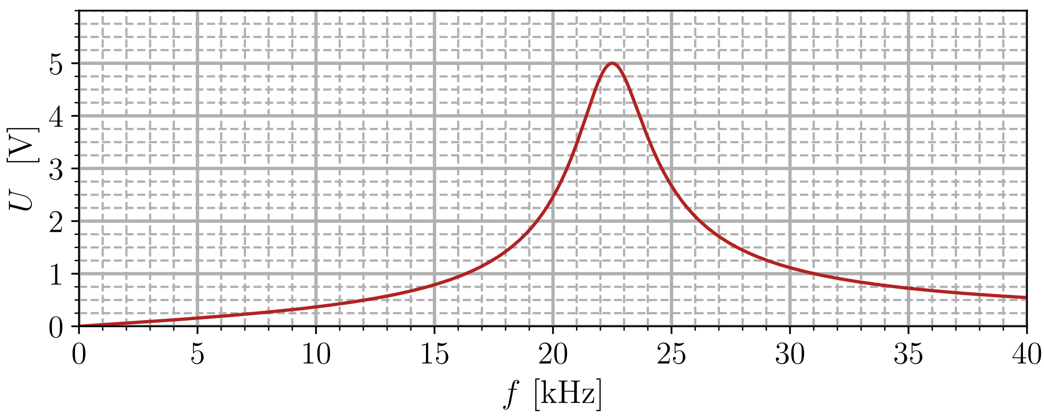


1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.
2) Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension $u(t)$. Préciser la pulsation ω_0 à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de $u(t)$ à cette pulsation.
3) Mettre l'amplitude réelle U de $u(t)$ sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

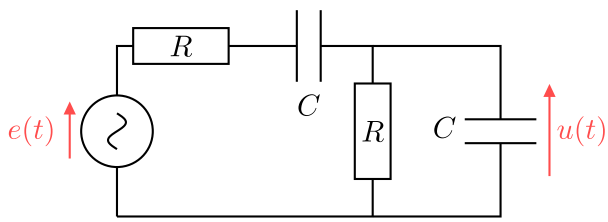
avec Q un facteur sans dimension à exprimer en fonction de R,L et C.

4) Exprimer la bande passante $\Delta\omega$ de cette résonance en fonction de Q et ω_0.
5) En déduire les valeurs numériques de C et E_0 à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de $u(t)$ en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$, sachant que $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.



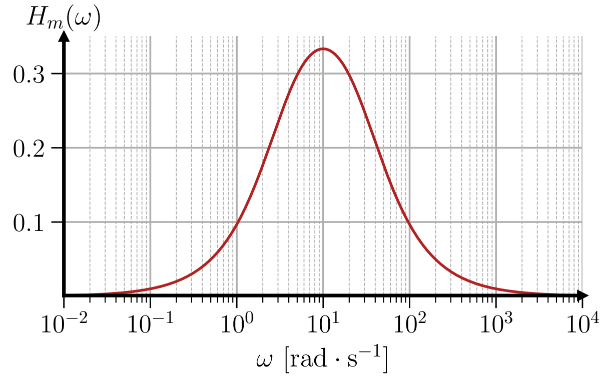
II Filtre de Wien

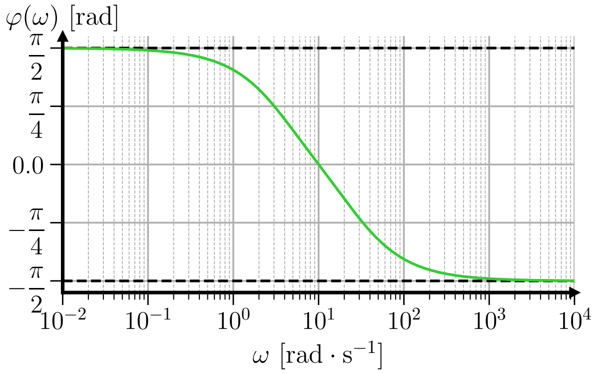
On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et on pose $H_m = U_m/E_m$.



1) Déterminer les valeurs limites de $u(t)$ à basse et haute fréquences.

Les courbes représentatives de $H_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont fournies par les figures ci-dessous.





2) Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.

3) Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.

4) Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$. La mettre sous la forme :

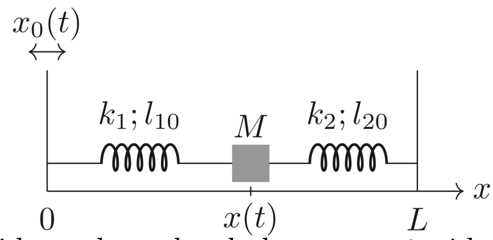
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec H_0, ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

5) Déterminer graphiquement la valeur du produit RC.

☆☆ III Système à deux ressorts

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'abscisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = \ell_{10} + \ell_{20}$.

1) Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

2) Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de gauche est immobile en $x_0 = 0$.

3) On introduit $X(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$. Établir l'équation différentielle sur $X(t)$ lorsque la paroi bouge.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x}_0(t) = X_{0m}\exp(\mathrm{j}\omega t)$, $\underline{X}(t) = X_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \varphi))$ et $\underline{v}(t) = V_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \phi))$ associées à $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

4) Définir les amplitudes complexes $\underline{X}_0$, $\underline{X}$ et $\underline{V}$ de $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t)$.

5) En exprimant ω_0, Q et α en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0$$

6) Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.