Correction du TD d'entraînement

☆ I Résonance d'un circuit bouchon

1) On effectue un pont diviseur de tension aux bornes de l'impédance équivalente de L et C, avec $\underline{Y}_{\text{eq}} = \text{j}C\omega + 1/\text{j}L\omega$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}E_0 = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}}E_0 = \frac{E_0}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}$$

en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.

2) L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

3) On cherche $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $\dfrac{Q}{\omega_0} = RC$; on trouve donc

$$\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

4) On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \omega^2 - {\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2 - {\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow & \boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2 \\
&\Leftrightarrow \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1+4Q^2\right) \\
&\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \\
&\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}
$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1-\sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1-\sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$
\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}-1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}+1\right)
$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$
\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}
$$

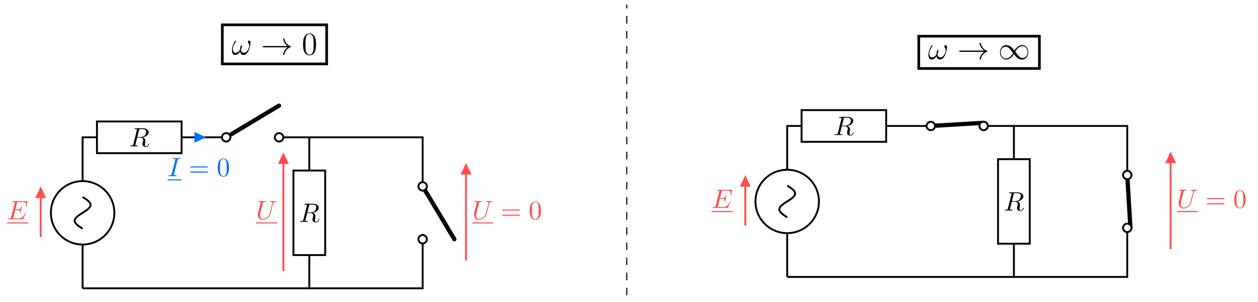
5) Sur le graphique, on trouve $U_{\max} = 5\,\mathrm{V} = E_0$. On a de plus $f_0 = 22{,}5\,\mathrm{kHz}$ et $\Delta f \approx 3\,\mathrm{kHz}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} \approx 7{,}5}$. Avec l'expression de Q, on isole C :

$$
Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{Q^2 L}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 7{,}5 \\ L = 1\,\mathrm{mH} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}
$$

$$
\text{A.N. :} \quad \boxed{C = 5{,}6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}
$$

II Filtre de Wien

1)



Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{u} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{u} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

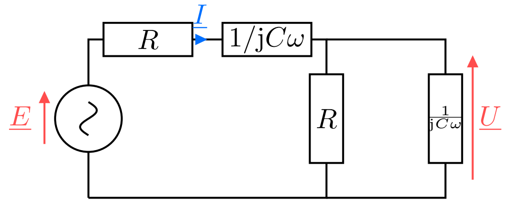
2) On observe bien une résonance en tension, étant donné qu'on trouve un **maximum de l'amplitude pour $\omega \neq 0$ et $\omega \neq \infty$**.

3) On lit $\boxed{\omega_r = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$, et on trouve les pulsations de coupure en traçant une droite horizontale à $H_{m,\max}/\sqrt{2} = 0{,}23$ (avec $H_{m,\max} = 0{,}33$) et en prenant les abscisses des intersections. On trouve alors

$$
\boxed{\omega_1 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\omega = 18\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}
$$

En effet, l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, il faut donc faire attention à la lecture.

4) Notons $\underline{Z}_{R\|C}$ l'impédance et $\underline{Y}_{R\|C}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :



$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{R\|C}}{\underline{Z}_{R\|C}+\underline{Z}_R+\underline{Z}_C} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+(\underline{Z}_R+\underline{Z}_C)\,\underline{Y}_{R\|C}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+\left(R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}_{R\|C}} = \frac{1}{1+\left(R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3+\mathrm{j}\left(RC\omega-\dfrac{1}{RC\omega}\right)}}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1+\dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C**, tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

5) Par cette étude, on trouve que $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{RC}$; ainsi, on a simplement

$$\boxed{RC = 0{,}10\,\mathrm{Hz}}$$

☆☆ III Système à deux ressorts

1)
- ◇ **Système** : masse ;
- ◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;
- ◇ **Position de la masse** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$;
- ◇ **Longueur ressort 1** : $\ell_1(t) = x(t) - x_0(t)$;
- ◇ **Longueur ressort 2** : $\ell_2(t) = L - x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Rappel du ressort 1 $\overrightarrow{F}_1 = -k_1(\ell_1(t)-\ell_{10})\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Rappel du ressort 2 $\overrightarrow{F}_2 = k_2(\ell_2(t)-\ell_{20})\,\overrightarrow{u_x}$;
5) Force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v} = -h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$.

2) Avec le PFD, on trouve

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P}+\overrightarrow{R}+\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\overrightarrow{f}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1(\ell_1(t)-\ell_{10})+k_2(\ell_2(t)-\ell_{20})-hv \\ -mg+R \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(\ell_1(t)-\ell_{10})+k_2(\ell_2(t)-\ell_{20})}$$

En développant les longueurs comme indiqué question 1, on a

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k_1(x(t)-x_0(t)-\ell_{10})+k_2(L-x(t)-\ell_{20})}$$

À l'équilibre les dérivées de $x(t)$ sont nulles, d'où

$$0=-k_1(x(t)-x_0(t)-\ell_{10})+k_2(L-x(t)-\ell_{20})$$

Ainsi, avec $x_{0,\mathrm{eq}}(t)=0$ et $L=\ell_{10}+\ell_{20}$ (d'après l'énoncé) puis $x(t)=x_{\mathrm{eq}}$ (par définition), on a

$$\begin{aligned}0&=-k_1(x_{\mathrm{eq}}-0-\ell_{10})+k_2(\ell_{10}+\cancel{\ell_{20}}-x_{\mathrm{eq}}-\cancel{\ell_{20}})\\ \Leftrightarrow\ &(k_1+k_2)(\ell_{10}-x_{\mathrm{eq}})=0\end{aligned}$$

Comme $k_1+k_2>0$, on trouve

$$\boxed{x_{\mathrm{eq}}=\ell_{10}}$$

3) Cette fois-ci, on garde $x_0(t)$ dans l'équation. Il vient alors

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+(k_1+k_2)(x(t)-x_{\mathrm{eq}})=k_1x_0(t)$$

et en effectuant le changement de variable $X(t)=x(t)-x_{\mathrm{eq}}$, on trouve l'équation habituelle

$$\boxed{m\ddot{X}+h\dot{X}+kX(t)=KX_{0m}\cos(\omega t)}$$

avec $k=k_1+k_2$.

4) On a simplement $\underline{X}_0=X_{0m}$, $\underline{X}=X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ et $\underline{V}=V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.

5) En utilisant l'équation différentielle mais en complexes et sous forme canonique, on trouve

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X}+\mathrm{j}\omega\frac{h}{m}\underline{X}+\frac{k}{m}\underline{X}=\frac{k_1}{m}X_{0m}\Leftrightarrow\underline{X}=\frac{k_1X_{0m}}{m}\times\frac{1}{\dfrac{k}{m}-\omega^2+\mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}}$$

Étant donné que $V=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, $\underline{V}=\mathrm{j}\omega\underline{X}$, soit

$$\begin{aligned}\underline{V}&=\frac{k_1X_{0m}}{m}\times\frac{\mathrm{j}\omega}{\dfrac{k}{m}-\omega^2+\mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}}\\ \Leftrightarrow\underline{V}&=\frac{k_1X_{0m}}{m}\times\frac{1}{\dfrac{h}{m}-\mathrm{j}\dfrac{k}{m\omega}+\mathrm{j}\omega}\\ \Leftrightarrow\underline{V}&=\frac{k_1}{h-\mathrm{j}\dfrac{k}{\omega}+\mathrm{j}m\omega}X_{0m}\\ \Leftrightarrow\underline{V}&=\frac{k_1/h}{1+\mathrm{j}\left(\dfrac{m\omega}{h}-\dfrac{k}{h\omega}\right)}\underline{X}_0\end{aligned}$$

Avec $Q\omega_0=\frac{k}{h}$ et $\frac{Q}{\omega_0}=\frac{m}{h}$, on trouve bien

$$\boxed{\underline{V}=\frac{\alpha}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0}\quad\text{avec}\quad\boxed{\begin{cases}\alpha=\dfrac{k_1}{h}\\ \omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ Q=\dfrac{\sqrt{km}}{h}\end{cases}}$$

6) L'amplitude réelle de la vitesse donne

$$V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}X_{0m}$$

qui est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc bien une résonance en vitesse pour cette pulsation, avec $V_{\max} = \alpha X_{0m}$.