TD entraînement : filtrage linéaire

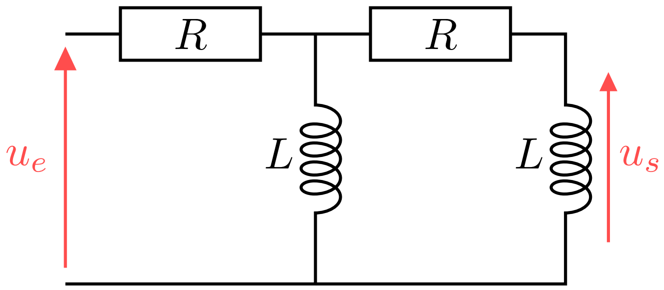
I Filtre ADSL

Un lutin malin semble avoir chourré votre filtre ADSL. Sale histoire. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1) Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informa- tiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Vous réalisez le filtre ci-dessous.



2) Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

3) Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3\mathrm{j}x - x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

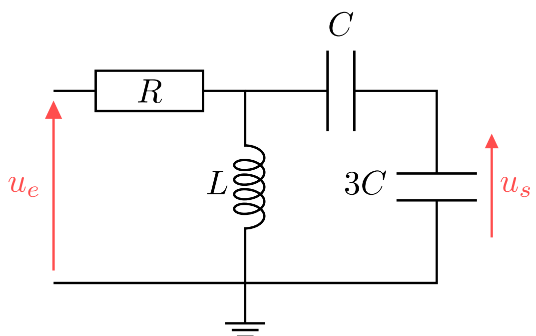
et exprimer ω_0 en fonction de R et L.

4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.

5) Vous possédez des résistances de 100 Ω. Quelle valeur d'inductance L choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

II Filtre de Colpitts

On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).



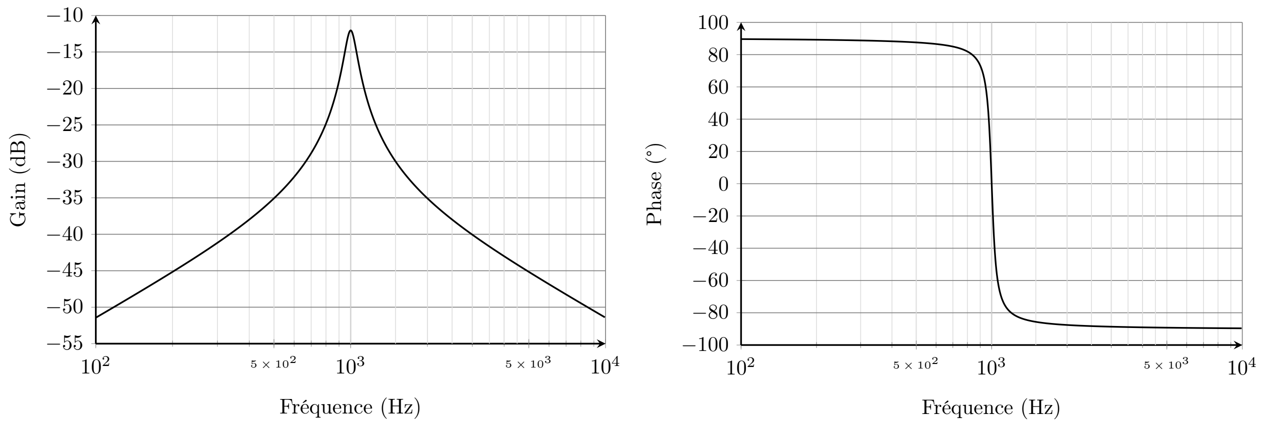
1) Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

2) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{A}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{A}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

En introduisant des constantes A, w_0 et Q dont on précisera les expressions en fonction de R, L et C.

Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour $Q = 6$ est donné ci-dessous.



3) Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord $f_0 = \omega_0/2\pi$ ainsi que des fréquences de coupure.

☆☆ III Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

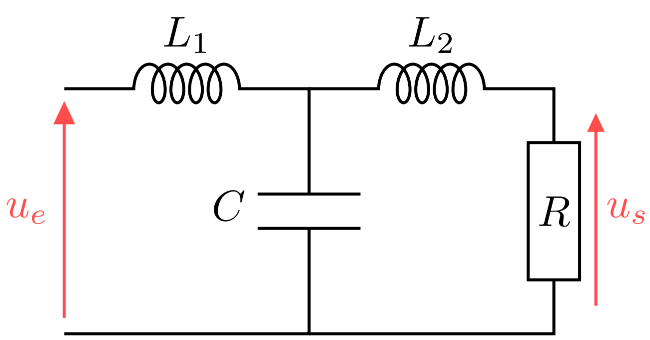
On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le module H de sa fonction de transfert harmonique en tension $\underline{H}$ s'exprime :

$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^6}} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

1) Montrer qu'une fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + 2\mathrm{j}x + 2(\mathrm{j}x)^2 + (\mathrm{j}x)^3}$ correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

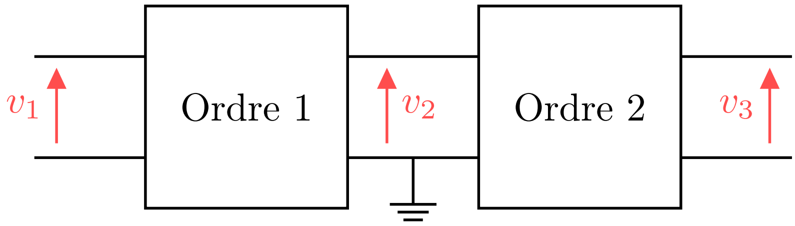
2) Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

3) On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de R et ω_0, les valeurs de L_1, L_2 et C pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

4) Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.