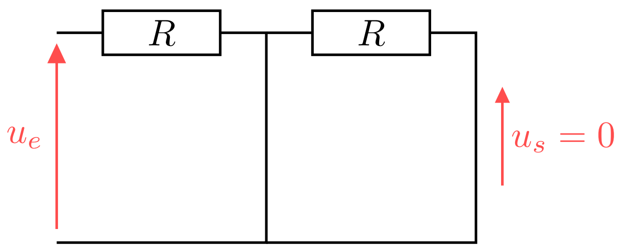
Électrocinétique – chapitre 8

Correction du TD d'entraînement

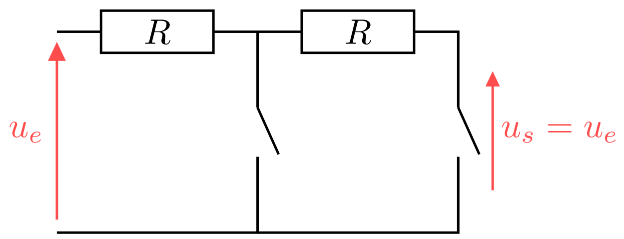
I Filtre ADSL

1) On isole les signaux téléphoniques avec un **filtre passe-bas**, et les signaux informatiques avec un **filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être à la fois nettement supérieure aux fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : on prendra donc $\boxed{f_0 = 10\,\mathrm{kHz}}$.

2) En basses fréquences ($\omega \to 0$), les bobines se comportent comme des fils, soit

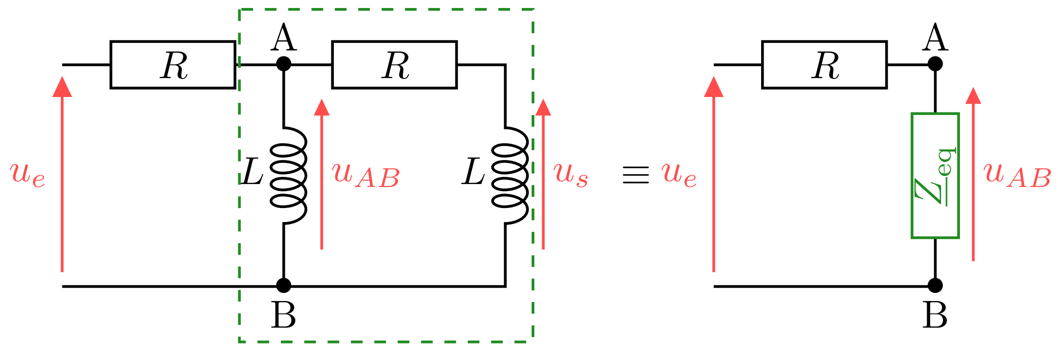


En hautes fréquences ($\omega \to \infty$), les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, soit



Ainsi, le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un **filtre passe-haut**. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

3) Pour exprimer u_s en fonction de u_e, on peut faire un premier pont diviseur de tension pour exprimer u_s en fonction de u_{AB} du milieu ; puis avec une impédance équivalente à l'ensemble des 3 dipôles de droite, on refait un pont diviseur de tension pour avoir u_{AB} en fonction de u_e, et on combine.



On a donc d'abord :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}\underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega + R}\underline{U}_{AB}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_R}\underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R\underline{Y}_{\text{eq}}}\underline{U}_e$$

On calcule alors $\underline{Y}_{\text{eq}}$:

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}$$

Et on combine :

$$\underline{U}_s = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega} \times \frac{1}{1+\underline{Z}_R\underline{Y}_{\mathrm{eq}}}\underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega+R\left(\dfrac{R+\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega}+1\right)} \times \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega}\underline{U}_e$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{-(L\omega)^2}{R^2+3\mathrm{j}RL\omega-(L\omega)^2}\underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \frac{-\left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}{1+3\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega-\left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}\underline{U}_e$$

Ainsi, en divisant par $\underline{U}_e$ pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2+3\mathrm{j}x}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$

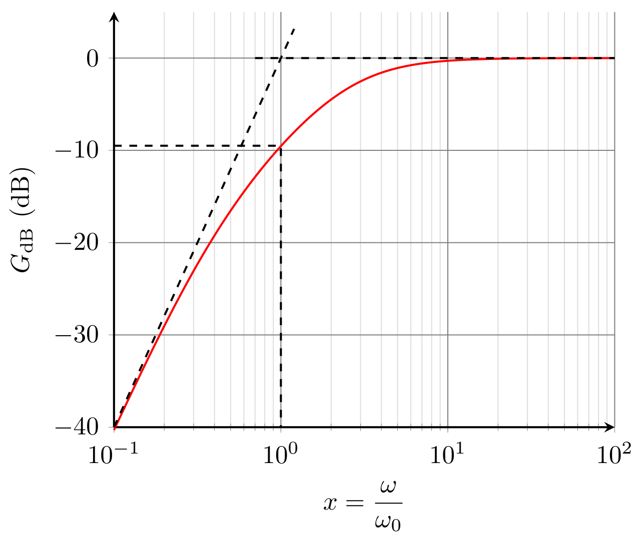
4) Pour $x \gg 1$, les termes en x^2 l'emportent sur les autres termes au numérateur et au dénominateur, et la fonction de transfert devient $\underline{H} \underset{x\to\infty}{\sim} 1$, donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 0}$ et $\boxed{\varphi = 0}$ (réel positif).

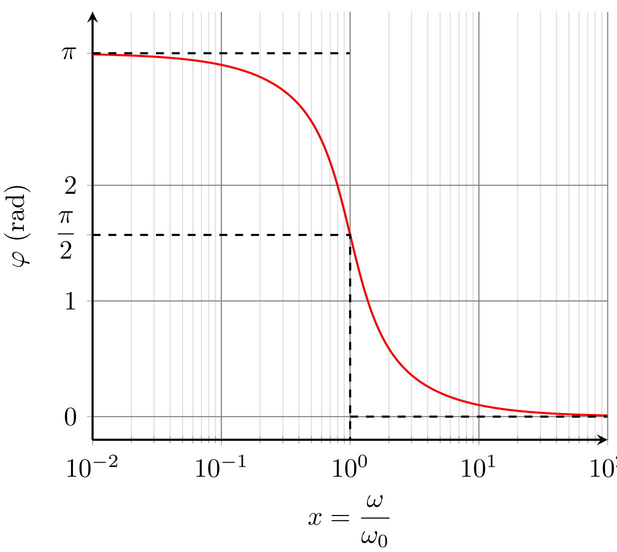
Pour $x \ll 1$, les termes en x sont négligeables devant 1 au dénominateur, et on garde le numérateur : la fonction de transfert devient donc $\underline{H} \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$, donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to 0}{\sim} 40\log(x)}$ (pente de 40 dB/décade). Pour la phase, c'est moins évident, on pourrait avoir $\varphi = \pm\pi$ puisque c'est un réel négatif. Il faut étudier le domaine d'existence $\forall x$:

$$\begin{aligned}
\arg(\underline{H}(x)) &= \arg\left(-x^2\right) - \arg\left(1-x^2+3\mathrm{j}x\right) && \text{– } \arg(\underline{z}) = \arg(\underline{z}^*) \\
&= \arg\left(-x^2\right) + \arg\left(\left(1-x^2-3\mathrm{j}x\right)\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}\right) && \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2) \\
&= \underbrace{\arg\left(-x^2\right)}_{\pm\pi} + \underbrace{\underbrace{\arg\left(3x+\mathrm{j}\left(1-x^2\right)\right)}_{\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} - \underbrace{\arg(\mathrm{j})}_{\frac{\pi}{2}}}_{\in]-\pi;0[}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'angle s'exprime entre $]-\pi;\pi[$, on a forcément $\arg(-x^2) = +\pi$, soit $\boxed{\varphi = \pi}$.

Pour $x = 1$, on trouve $\underline{H}(1) = \mathrm{j}/3$ donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}}(1) = 20\log(1/3) = -9{,}5\,\mathrm{dB}}$, et $\boxed{\varphi(1) = \pi/2}$ (imaginaire pur).





Il n'y a pas de pic de résonance car le facteur de qualité Q est plus petit que $1/\sqrt{2}$.

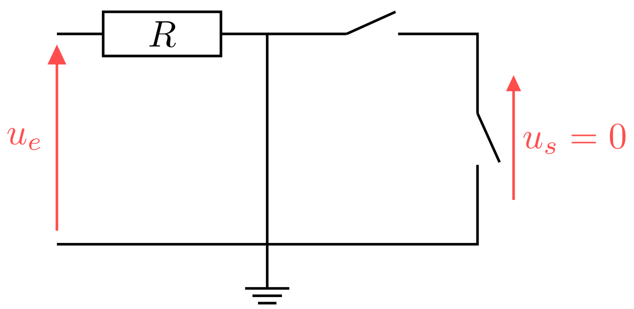
5) La fréquence de coupure est $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{R}{2\pi L}$; on doit donc prendre

$$\boxed{L = \frac{R}{2\pi f_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100\,\Omega \\ f_0 = 10\,\text{kHz} \end{cases}$$

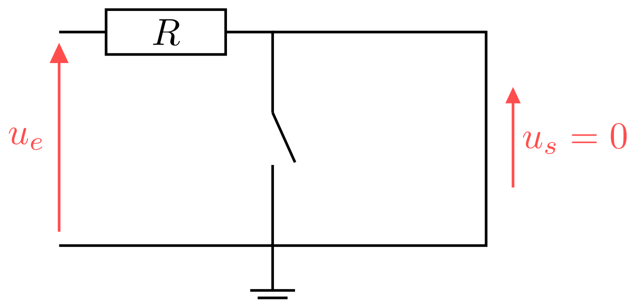
$$\text{A.N. :} \quad \boxed{L = 1{,}6\,\text{mH}}$$

☆☆ II Filtre de COLPITTS

1) En basses fréquences ($\omega \to 0$), les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, la bobine comme un fil : la tension u_s est donc nulle.

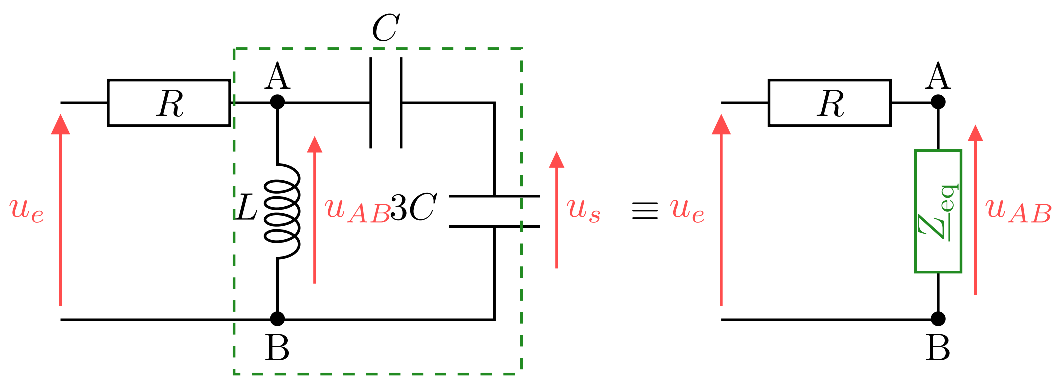


En hautes fréquences ($\omega \to \infty$), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un interrupteur ouvert : la tension u_s est donc nulle.



Comme la tension est nulle aux extrêmes, c'est un **passe-bande**. Si elle était égale à la tension d'entrée aux extrêmes, ça serait un coupe-bande.

2) On effectue deux diviseurs de tension successifs : un pour déterminer u_s en fonction de u_L, puis avec une impédance équivalente des trois dipôles de droite, on détermine u_L en fonction de u_e et on combine. C'est le même fonctionnement que pour l'exercice sur l'ADSL, question 3.



On a ainsi en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_{3C}}{\underline{Z}_{3C} + \underline{Z}_C}\underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1/\text{j}3C\omega}{1/\text{j}3C\omega + 1/\text{j}C\omega}\underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{1+3}\underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_s = \frac{\underline{U}_{AB}}{4}}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_R}\underline{U}_e \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{\text{eq}}}\underline{U}_e}$$

On calcule alors $\underline{Y}_{\text{eq}}$ de l'association en parallèle de L et C en série avec $3C$. **Attention** à l'association en série de capacités :

$$Z_{C+3C} = \frac{1}{\text{j}3C\omega} + \frac{1}{\text{j}C\omega} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{\text{j}3C\omega}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C+3C} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}3C\omega/4}$$

Et on combine :

$$\underline{U}_s = \frac{1}{4}\frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{\text{j}L\omega} + \dfrac{\text{j}3C\omega}{4}\right)}\underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{4}\frac{1}{1 + \text{j}\left(-\dfrac{R}{L\omega} + \dfrac{3RC\omega}{4}\right)}\underline{U}_e$$

Ainsi, en divisant par $\underline{U}_e$ pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{1/4}{1 + \text{j}\left(\dfrac{3RC\omega}{4} - \dfrac{R}{L\omega}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{A}{1 + \text{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

Reste à trouver Q et ω_0. Pour cela, on identifie membre à membre :

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} \quad (1) \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}}$$

où l'on obtient Q et ω_0 en multipliant les équations (1) et (2) d'une part puis en en prenant la racine carrée, et en divisant (2) par (1) en en prenant la racine carrée, respectivement.

3) Les parties rectilignes du diagramme correspondent aux limites asymptotiques du gain en décibels, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$. En effet,

$$\underline{H} \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \text{j}\frac{A}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \underline{H} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -\text{j}\frac{A}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow G_{\text{dB}} \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} 20\log\frac{A}{Q} + 20\log\frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} 20\log\frac{A}{Q} - 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \varphi \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -\frac{\pi}{2}$$

Pour $\omega = \omega_0$, on trouve simplement $\underline{H} = A$ donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -12\,\text{dB}$ et $\varphi = 0$. La fréquence de résonance (ou fréquence d'accord) correspond au pic du diagramme de Bode (ou à l'intersection des asymptotes du gain en décibels) d'une part, ou correspond à la fréquence pour laquelle la phase est nulle : on lit simplement $\boxed{f_0 = 1\,\text{kHz}}$.

On trouve les fréquences de coupure en trouvant les fréquences f_1 et f_2 telles que $G_{\text{dB}} = G_{\max} - 3\,\text{dB}$, soit $G_{\text{dB}} = -15\,\text{dB}$: on lit approximativement $\boxed{f_1 = 950\,\text{Hz}}$ et $\boxed{f_2 = 1050\,\text{Hz}}$.

☆☆ III Filtre de Butterworth d'ordre 3

1) Il suffit pour cette question de développer les puissances sur les j, de calculer le module et de développer :

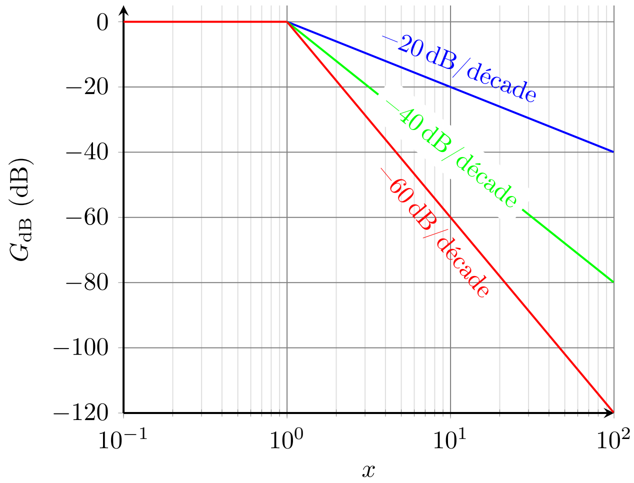
$$\underline{H} = \left(1 + 2\text{j}x - 2x^2 - \text{j}x^3\right)^{-1} \Leftrightarrow |\underline{H}| = \left((1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2\right)^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}| = \left(1 - \cancel{4x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2} - \cancel{4x^4} + x^6\right)^{-1/2} = \left(1 + x^6\right)^{-1/2}$$

ce qui correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

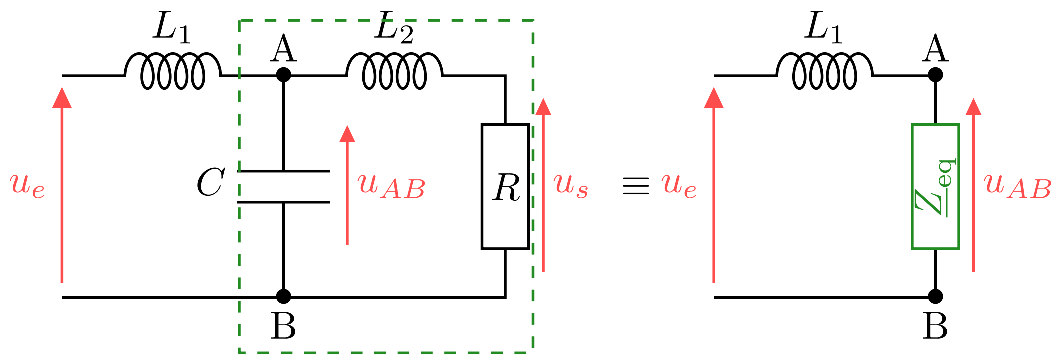
2) Pour étudier le diagramme de BODE asymptotique, on définit d'abord le gain en décibels : $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left((1+x^6)^{-1/2}\right) = -10\log(1+x^6)$. Ensuite, on étudie son comportement asymptotique pour $x \ll 1$ et $x \gg 1$: on trouve

$$\boxed{G_{\text{dB}} \underset{x\ll 1}{\sim} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{\text{dB}} \underset{x\gg 1}{\sim} -60\log(x)}$$



d'où le diagramme de BODE asymptotique ci-contre. Par rapport à de l'ordre 1 (−20 dB/décade) ou de l'ordre 2 (−40 dB/décade), l'atténuation des hautes fréquences est encore plus prononcé : une fréquence 10 fois supérieure à f_0 serait atténuée d'un facteur 1000 au lieu d'un facteur 10.

3) Ici encore, on utilise deux ponts diviseurs de tension successifs : on calcule u_s en fonction de u_{AB}, puis u_{AB} en fonction de u_e après avoir déterminé l'impédance équivalente de l'ensemble des dipôles de droite.



On aura donc en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L_2}}\underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_s = \frac{R}{R + \text{j}L_2\omega}\underline{U}_{AB}}$$

Et ensuite, on aura

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_{L_1}}\underline{U}_e \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{L_1}\underline{Y}_{\text{eq}}}\underline{U}_e}$$

On calcule alors $\underline{Y}_{\text{eq}}$ de l'association en parallèle de C et L_2 en série avec R :

$$\underline{Z}_{L_2+R} = \text{j}L_2\omega + R$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_{L_2+R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{\text{eq}} = \text{j}C\omega + \frac{1}{\text{j}L_2\omega + R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{\text{j}C\omega(\text{j}L_2\omega + R) + 1}{\text{j}L_2\omega + R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1 - L_2C\omega^2 + \text{j}RC\omega}{R + \text{j}L_2\omega}}$$

Et on combine :

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_s &= \frac{R}{R+\mathrm{j}L_2\omega} \times \frac{1}{1+\mathrm{j}L_1\omega\left(\dfrac{1-L_2C\omega^2+\mathrm{j}RC\omega}{R+\mathrm{j}L_2\omega}\right)}\underline{U}_e \\
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R+\mathrm{j}L_2\omega} \times \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{j}L_1\omega-\mathrm{j}L_1L_2C\omega^3+(\mathrm{j}\omega)^2RCL_1}{R+\mathrm{j}L_2\omega}}\underline{U}_e \\
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R+\mathrm{j}L_2\omega+\mathrm{j}L_1\omega-\mathrm{j}L_1L_2C\omega^3+(\mathrm{j}\omega)^2RCL_1}\underline{U}_e \\
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\dfrac{L_1+L_2}{R}+(\mathrm{j}\omega)^2L_1C+(\mathrm{j}\omega)^3\dfrac{L_1L_2C}{R}}\underline{U}_e
\end{aligned}
$$

en utilisant que $-\mathrm{j} = \mathrm{j}^3$. Ainsi, en divisant par $\underline{U}_e$ pour avoir la fonction de transfert, on a bien

$$
\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1+2\mathrm{j}x+2(\mathrm{j}x)^2+(\mathrm{j}x)^3}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{2}{\omega_0} &= \frac{L_1+L_2}{R} \\ \frac{2}{{\omega_0}^2} &= L_1C \\ \frac{1}{{\omega_0}^3} &= \frac{L_1L_2C}{R} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{aligned} L_1 &= \frac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 &= \frac{R}{2\omega_0} \\ C &= \frac{4}{3Rw_0} \end{aligned}\right.}
$$

4) Pour mettre des filtres en cascade et avoir $\underline{H} = \underline{H}_1\underline{H}_2$, il faut que l'impédance de sortie du filtre 1 soit faible devant l'impédance d'entrée du filtre 2. Dans ce cas, on utilise un filtre d'ordre 1 avec un numérateur constant (donc un passe-bas de la forme $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1+\mathrm{j}x}$), et un filtre d'ordre 2 avec un numérateur lui aussi constant : soit un passe-bas soit un passe-bande. Le passe-bande fait intervenir $\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)$ au dénominateur, donc il est plus simple d'utiliser une passe-bas d'ordre 2 avec $1+\mathrm{j}/Qx+(\mathrm{j}x)^2$ au dénominateur :

$$
\underline{H} = \frac{H_1}{1+\mathrm{j}x} \times \frac{H_2}{1+\dfrac{\mathrm{j}}{Q}x+(\mathrm{j}x)^2} = \frac{H_1H_2}{1+\mathrm{j}x\left(1+\dfrac{1}{Q}\right)+(\mathrm{j}x)^2\left(1+\dfrac{1}{Q^2}\right)+(\mathrm{j}x)^3}
$$

Pour trouver un filtre de Butterworth d'ordre 3 de cette manière, il faut donc $H_1 = H_2 = 1$ et $\boxed{Q=1}$.