Mécanique – chapitres 1 et 2

TD d'entraînement : Cinématique et dynamique du point

I Étude d'un volant de badminton

Un volant de badminton a une masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$. On veut vérifier expérimentalement l'information trouvée sur internet qui précise qu'un volant lâché de très haut atteint une vitesse limite $v_l = 25\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pour tester cette affirmation, on veut déterminer l'altitude h à laquelle il faut le lâcher (sans vitesse initiale) pour qu'il atteigne cette vitesse limite.

On lâche le volant d'une fenêtre en hauteur et on filme sa chute verticale. On note O le point de départ de la chute, et (Oz) l'axe vertical dirigé vers le bas. Au cours de la chute, on prend en compte une force de frottement due à l'air de la forme $\overrightarrow{F} = -\lambda v \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse du point M, v sa norme et λ un coefficient positif. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Établir l'équation différentielle portant sur la norme du vecteur vitesse $v(t)$.

2) Montrer l'existence d'une vitesse limite v_l et l'exprimer en fonction de λ, m et g.

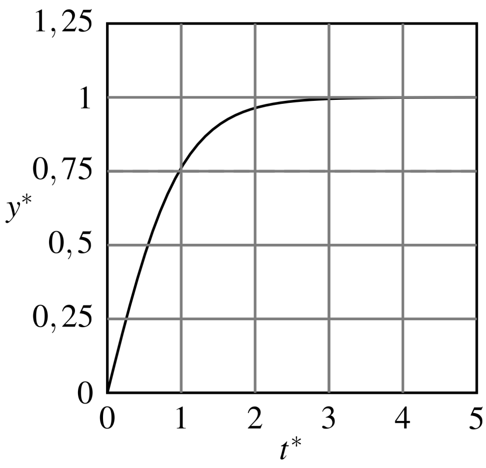
On note $t^* = t/\tau$, $z^* = z/L$ et $v^* = v/v_l$, avec $\tau = v_l/g$ et $L = v_l\tau$.

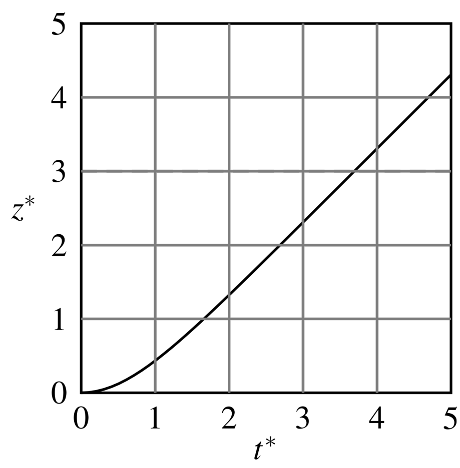
3) Montrer que t^*, z^* et v^* sont trois grandeurs sans dimension.

4) Montrer que l'équation différentielle portant sur la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1$$

La résolution de l'équation précédente conduit à des solutions dont on donne les représentations graphiques ci-dessous.





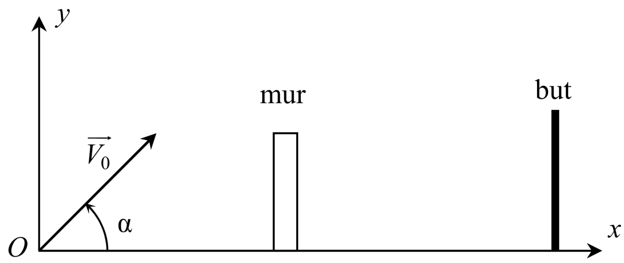
5) À l'aide des courbes, décrire les deux phases du mouvement.

6) Déterminer l'altitude minimale h à laquelle il faut lâcher le volant pour que sa vitesse au sol soit supérieure ou égale à 95% de v_l. On exprimera cette altitude en fonction de L. Déterminer également la durée Δt de l'expérience en fonction de τ.

7) En admettant que la vitesse limite est proche de la valeur trouvée sur internet, calculer numériquement L et τ puis h et Δt.

☆★☆ II Coup franc et frottements fluides

On étudie dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe (O,x,y), un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (xOy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430\,\mathrm{g}$, est assimilé à un point matériel M initialement au sol en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 de norme $20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

   a – Établir les équations horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

   b – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

   c – Le tir est-il cadré ?

2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}(t)$ avec $\alpha = 5{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.

   a – Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{\alpha}$.

   b – Donner l'équation de la trajectoire.

   c – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

   d – Le tir est-il cadré ?

☆★☆ III Étude d'une skieuse

On étudie le mouvement d'une skieuse descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$ avec λ un coefficient positif et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse du skieur.

On note $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottements exercée par la neige, et f le coefficient de frottements solides tel que $\|\overrightarrow{T}\| = f\|\overrightarrow{N}\|$.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne le plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initiale avec une vitesse négligeable. On note (Oy) l'axe normal à la piste en O et dirigée vers le haut.

1) Calculer $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
2) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et la position $x(t)$ de la skieuse à chaque instant t.
3) Montrer que la skieuse atteint une vitesse limite $\overrightarrow{v}_l$ et exprimer $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ en fonction de $\overrightarrow{v}_l$.
4) Calculer $v_l = \|\overrightarrow{v}_l\|$ pour $\lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, $f = 0{,}9$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 65\,\mathrm{kg}$ et $\alpha = 45°$.
5) Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $v_l/2$.
6) À la date t_1, la skieuse chute. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottements sur le sol est multiplié par 10. Calculer la distance parcourue par la skieuse avant qu'elle ne s'arrête.