

Cinématique du point en cartésiennes

📖 Sommaire

I Description et paramétrage du mouvement	3
I/A Système et point matériel	3
I/B Notion de référentiel et relativité du mouvement	3
I/C Outils mathématiques	5
I/D Projection d'un vecteur sur un autre	7
II Position, vitesse et accélération	7
II/A Position	7
II/B Vitesse	9
II/C Accélération	10
III Exemples de mouvements	11
III/A Mouvement rectiligne uniforme	11
III/B Mouvement rectiligne uniformément accéléré	11
III/C Mouvement courbe uniformément accéléré	12

✂ Capacités exigibles

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps. <input type="checkbox"/> Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut. <input type="checkbox"/> Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème. <input type="checkbox"/> Coordonnées cartésiennes : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse. | <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes. <input type="checkbox"/> Mouvement à vecteur accélération constant : exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes. <input type="checkbox"/> Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. |
|--|--|

✓ L'essentiel

Définitions

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Système et point matériel	3
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Référentiel	3
<input type="checkbox"/>	M1.3 : Référentiels fondamentaux	3
<input type="checkbox"/>	M1.4 : Base de projection et repère	6
<input type="checkbox"/>	M1.5 : Repère cartésien	6
<input type="checkbox"/>	M1.6 : Position en cartésiennes	7
<input type="checkbox"/>	M1.7 : Déplacement élémentaire cartésien	7
<input type="checkbox"/>	M1.8 : Équations horaires	8
<input type="checkbox"/>	M1.9 : Trajectoire	8
<input type="checkbox"/>	M1.10 : Vitesse	9
<input type="checkbox"/>	M1.11 : Accélération	10
<input type="checkbox"/>	M1.12 : Mouvement rectiligne uniforme	11
<input type="checkbox"/>	M1.13 : Uniformément accéléré	11

Propriétés

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Vitesse en cartésiennes	9
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Accélération en cartésiennes	10

Démonstrations

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Vecteur vitesse	9
--------------------------	----------------------------------	---

Applications

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Mouvement rectiligne uniforme	11
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Mvt. rect. uniformé ^t accéléré	11
<input type="checkbox"/>	M1.3 : Mvt. courbe uniformé ^t accéléré	12

Remarques

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Mécanique relativiste	5
--------------------------	--	---

Exemples

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Importance du référentiel	4
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Exemple d'effet relativiste	5
<input type="checkbox"/>	M1.3 : Équations horaires en TP	8
<input type="checkbox"/>	M1.4 : Trajectoires en TP	8
<input type="checkbox"/>	M1.5 : Vitesse selon expérience	9
<input type="checkbox"/>	M1.6 : Accélération selon expérience	10

Points importants

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Vitesse et trajectoire	9
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Accélération et trajectoire	10

Erreurs communes

<input type="checkbox"/>	M1.1 : Différence référentiel/repère	6
<input type="checkbox"/>	M1.2 : Différence vecteur/norme	10
<input type="checkbox"/>	M1.3 : Accélération	10

I Description et paramétrage du mouvement

I/A Système et point matériel

Définition M1.1 : Système et point matériel

En mécanique, le **système** est l'objet ou groupe d'objets dont on souhaite étudier le mouvement. Le point matériel est le point géométrique qui représente le système entier, et que l'on repère pour connaître le son mouvement. On lui affecte toute la masse du système.

La définition du système est **primordiale et indispensable** pour la mécanique. En effet, l'étude du mouvement sera radicalement différente entre les systèmes {bille} et {bille+Terre}. Il en sera de même en dynamique, où ce sont les forces **extérieures** au système qui entrent en jeu, il faut donc définir l'extérieur.

Dans le cadre de la **mécanique du point**, la forme de l'objet importe peu. Ainsi, on choisira de suivre un point caractéristique du système, souvent son centre de gravité. Celui-ci pourra être repéré dans l'espace et le temps par 3+1 coordonnées (3 d'espace, 1 de temps).

I/B Notion de référentiel et relativité du mouvement

Un **mouvement est toujours relatif**, et la **description d'un mouvement dépend du référentiel**.

♥ Définition M1.2 : Référentiel

Un **référentiel**, noté \mathcal{R} , est un **objet** de référence permettant de repérer un autre objet dans l'espace-temps. On y associe un **repère** générique pour décrire le mouvement dans l'espace, constitué de :

- ◇ une **origine** O pour mesurer des distances ;
- ◇ un **ensemble de 3 axes** pour définir des directions.

Ainsi, on notera les grandeurs liées à un référentiel *via* l'indication de celui-ci en indice, précédé d'une barre oblique ou verticale selon la taille de la grandeur :

$$\vec{x}_{/\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Le mouvement dépendant du référentiel, il faut choisir le référentiel adéquat par rapport au mouvement que l'on souhaite étudier. Souvent, on choisit parmi trois référentiels classiques :

♥ Définition M1.3 : Référentiels fondamentaux

- ◇ **Référentiels terrestres** :
 - ▷ **Origine** : O centre de la Terre ou point fixe à sa surface
 - ▷ **Axes** : 3 axes vers des **points fixes** à sa surface ou 2 horizontaux, 1 vertical
 - ▷ **Utilisé** : mouvements sur la surface terrestre

Un objet fixe à la surface de la Terre ne bouge pas dans ce référentiel.

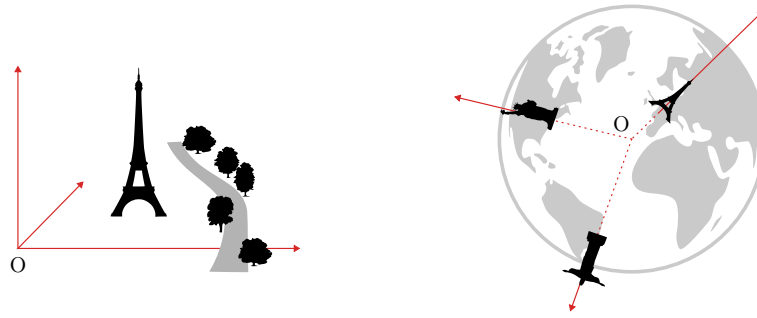


FIGURE M1.1 – Référentiels terrestres

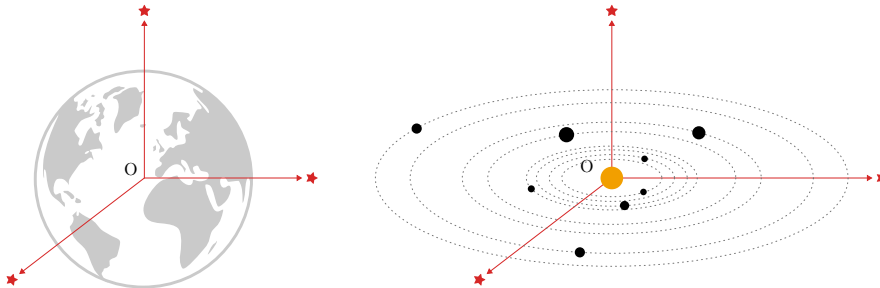
◇ **Référentiel géocentrique :**

- ▷ **Origine :** O le centre de la Terre
- ▷ **Axes :** 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité :** étude des satellites de la Terre

Un objet fixe à la surface de la Terre se déplace dans ce référentiel.

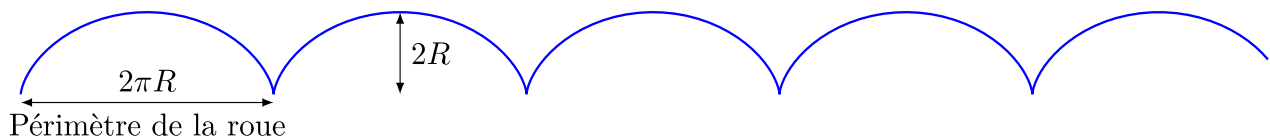
◇ **Référentiel héliocentrique :**

- ▷ **Origine :** O le centre du **Soleil**
- ▷ **Axes :** 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité :** étude du mouvement des planètes du système solaire



Exemple M1.1 : Importance du référentiel

- ◇ Du point de vue d'un cycliste, la valve de sa roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon un passant-e immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



- ◇ Du point de vue d'un terrien-ne fixe sur Terre (référentiel terrestre), un arbre planté ne bouge pas. Du point de vue du centre de la Terre (référentiel géocentrique), il tourne à la vitesse vertigineuse de $\underline{1100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}$.

Remarque M1.1 : Mécanique relativiste

Nous resterons cette année en mécanique **classique**, c'est-à-dire que les corps étudiés auront une vitesse très inférieure à celle de la lumière dans le vide :

$$v \ll c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Ce faisant, les mesures de longueurs ou de durées seront **absolues** et indépendantes du référentiel. Ça n'est pas le cas en mécanique *relativiste* : il faut alors ajouter une **horloge interne** au référentiel pour prendre en compte les effets de dilatation du temps.

Exemple M1.2 : Exemple d'effet relativiste

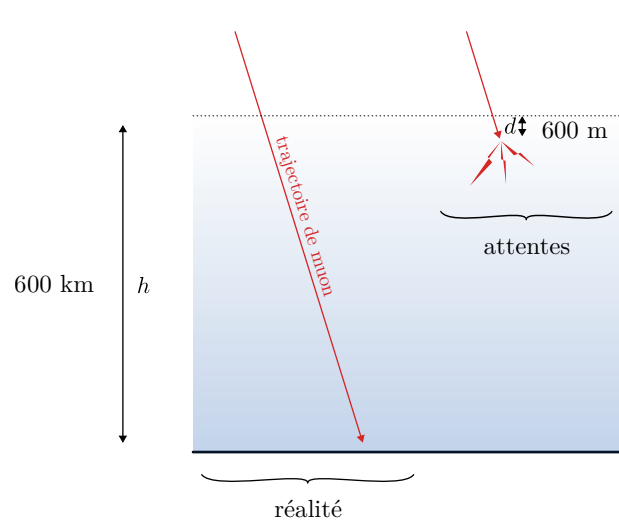
En plus de sa lumière, le Soleil émet plein de particules. Parmi elles se trouvent les **muons**. On peut en recréer en laboratoire et mesurer leur durée de vie dans l'atmosphère ; on trouve alors

$$\tau_{\text{labo}} = 2,0 \mu\text{s}$$

Ainsi, même en allant à la vitesse de la lumière, leur distance de parcours attendue d dans l'atmosphère d'épaisseur h serait de :

$$d = c\tau_{\text{labo}} = 600 \text{ m} \ll h = 600 \text{ km}$$

Or, **on détecte de nombreux muons au sol!** Dans le cadre de la mécanique classique, ils devraient aller à une vitesse **supérieure à la célérité de la lumière dans le vide**, ce qui est prohibé par la théorie.



Il s'opère en réalité une **dilatation de son temps de vie** pour un observateur extérieur en fonction de sa vitesse :

$$\tau_{\text{propre}} = \gamma \tau_{\text{labo}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \tau_{\text{propre}} = 82 \mu\text{s} \Rightarrow d_{\text{réelle}} = 27,0 \text{ km}$$

I/C Outils mathématiques**I/C)1 Vecteur****Rappel M1.1 : Vecteur**

Un vecteur est un objet mathématique qui se dénote avec une flèche vers la droite au-dessus d'une lettre : \vec{v} , et ayant :

- ◇ Un **point d'application** ;
- ◇ Un **sens** ;
- ◇ Une **direction** ;
- ◇ Une distance appelée **norme**, notée $\|\vec{v}\|$.

Une égalité de vecteurs \Rightarrow **trois** égalités de scalaires, une pour chaque direction de l'espace.

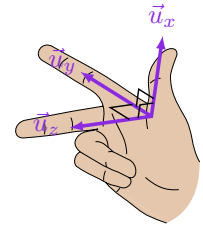
I/C) 2 Base de projection

En plus du repère générique du référentiel, il faut choisir un **repère spécifique** à l'étude du problème.

♥ Définition M1.4 : Base de projection et repère

On construit le repère spécifique à l'aide d'une **origine** et d'une **base de projection orthonormée directe**, constituée de 3 vecteurs tels que :

- ◇ **Ortho** : les trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ;
- ◇ **Normée** : leur norme est égale à 1^1 ;
- ◇ **Directe** : ils respectent la **règle de la main droite** (chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux précédents).



Les vecteurs de base n'ont **pas d'unité**. Ils définissent les trois directions dans lesquelles le point M pourrait se mouvoir.

Notation M1.1 : Vecteur colonne ou explicite

Ainsi pour une base générique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on représente de manière équivalente un vecteur par ses composantes sur chaque vecteur de base exprimées en colonne, ou par sa représentation explicite en fonction desdits vecteurs de base :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{A} = a_i \vec{i} + a_j \vec{j} + a_k \vec{k}$$

Attention M1.1 : Différence référentiel/repère

Il ne faut pas confondre le **référentiel**, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le **repère**, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères spécifiques différents qui peuvent être associés à un même référentiel.

I/C) 3 Repère fondamental cartésien

Définition M1.5 : Repère cartésien

Le repère cartésien est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs :

\vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z de **direction constante dans le temps**².

Jusqu'à notifié autrement, ce sera notre repère de prédilection.

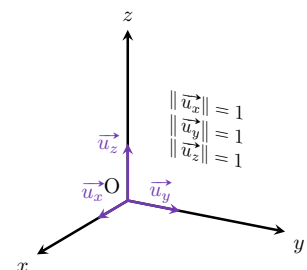


FIGURE M1.2 – Repère cartésien.

1. On dit qu'ils sont *unitaires*.

2. On trouve parfois la notation \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z .

I/D Projection d'un vecteur sur un autre

On aura souvent des vecteurs définis par une **norme** et un **angle** par rapport à l'un des axes, et l'on souhaiterait obtenir sa décomposition dans la base de projection.

♥ Outils M1.1 : Projection vectorielle (2D)

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur \vec{A} sur les vecteurs de base d'un repère, on réalise une **projection** :

$$\vec{A} \cdot \vec{u}_x = A_x \quad \text{et} \quad \vec{A} \cdot \vec{u}_y = A_y$$

On peut alors utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta)$$

avec θ l'angle entre les vecteurs, pris **positivement en sens trigonométrique**.

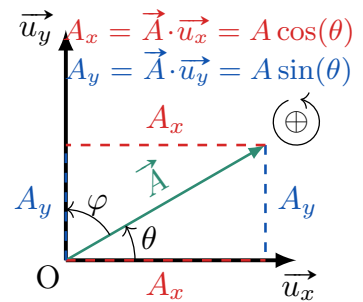


FIGURE M1.3 – Projection 2D

II Position, vitesse et accélération

II/A Position

II/A)1 Définition

Définition M1.6 : Position en cartésiennes

On note la position $\vec{OM}(t)$, **homogène à une distance**. Elle s'exprime

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z$$

et sa **norme** se calcule avec :

$$OM(t) = \|\vec{OM}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

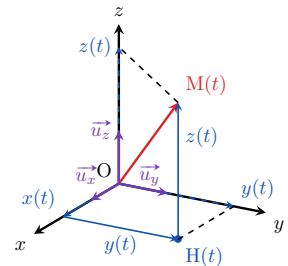


FIGURE M1.4 – Position cartésienne.

II/A)2 Déplacement élémentaire

Définition M1.7 : Déplacement élémentaire cartésien

Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal dt . En cartésiennes,

$$\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \vec{OM}(t + dt) = \begin{pmatrix} x(t) + dx \\ y(t) + dy \\ z(t) + dz \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t) = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

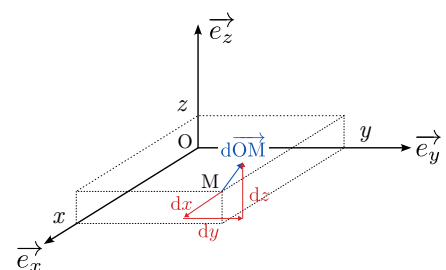


FIGURE M1.5 – $d\vec{OM}$ en cartésiennes.

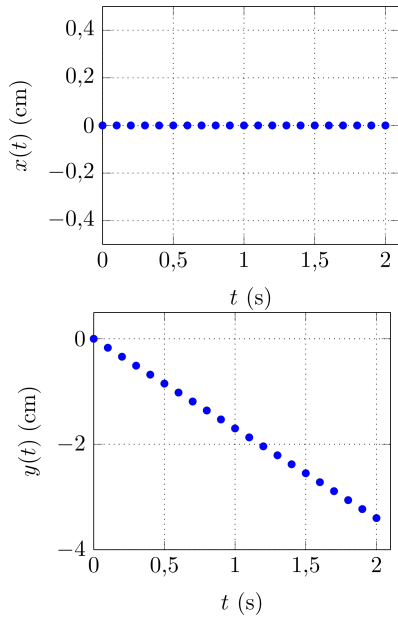
II/A) 3 Équations horaires et trajectoire

Définition M1.8 : Équations horaires

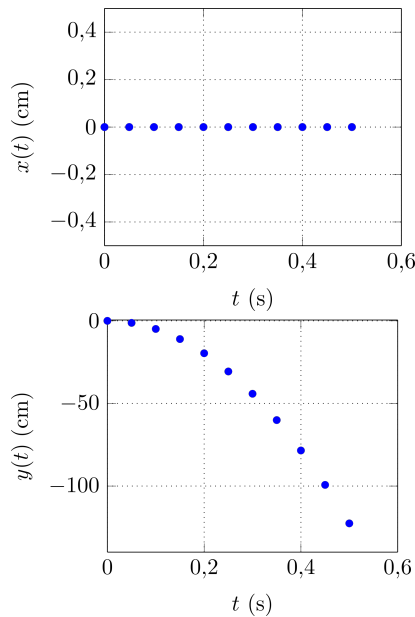
Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ exprimées **explicitement** en fonction du temps t .

Exemple M1.3 : Équations horaires en TP

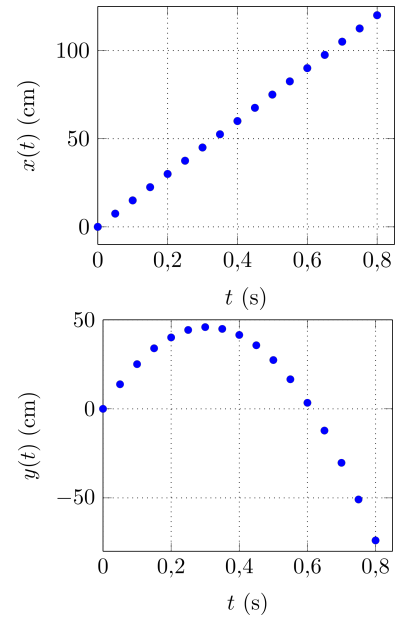
Chute dans glycérol



Chute libre verticale



Chute libre $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$



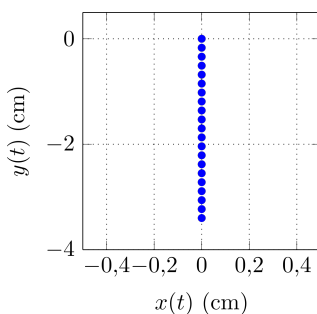
Définition M1.9 : Trajectoire

La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point $M(t)$ au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps dans l'espace.

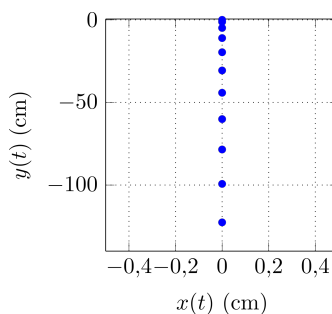
Exemple M1.4 : Trajectoires en TP

Sur les exemples précédents, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas, et une parabole dans le dernier.

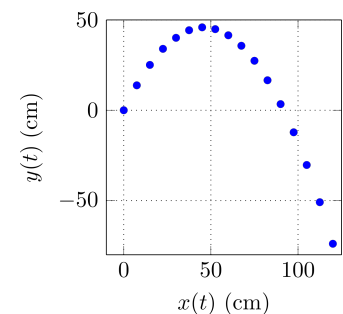
Chute dans glycérol



Chute libre verticale



Chute libre $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$



II/B Vitesse

Définition M1.10 : Vitesse

On définit la **vitesse** comme la **limite du taux d'accroissement** du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \text{donc} \quad [\vec{v}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

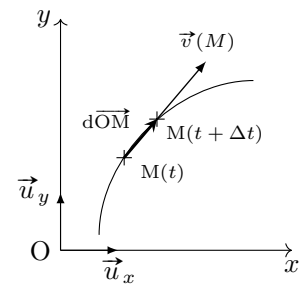


FIGURE M1.6 – Vecteur vitesse.

Important M1.1 : Vitesse et trajectoire

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

♥ Propriété M1.1 : Vitesse en cartésiennes

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

♥ Démonstration M1.1 : Vecteur vitesse

On peut donc voir la vitesse comme étant le **rapport entre $d\overrightarrow{OM}$ et dt** , ou comme étant la **dérivée de $\overrightarrow{OM}(t)$** . Or, les **vecteurs de la base cartésienne sont constants dans le temps**, soit :

Rapport

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad \blacksquare$$

Dérivée

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad \blacksquare$$

Exemple M1.5 : Vitesse selon expérience

En reprenant les exemples précédents :

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t) = \text{cte}$. Ainsi, $\vec{v}(t)$ est constant, et dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t)$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x}(t) = \text{cte}$ et $\dot{y}(t)$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

Attention M1.2 : Différence vecteur/norme

Selon le contexte, on fera particulièrement attention à ne pas confondre le mot « vitesse » avec le **vecteur** ou avec sa **norme**. Une vitesse, en **norme**, **ne peut pas être négative** ; les **composantes** du vecteur vitesse **peuvent être négatives**.

II/C Accélération**Définition M1.11 : Accélération**

On définit l'**accélération** comme la **limite du taux d'accroissement** du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \quad \text{donc} \quad [\vec{a}] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Important M1.2 : Accélération et trajectoire

Le **vecteur accélération** est toujours dirigé vers l'intérieur à la trajectoire (partie concave).

♥ Propriété M1.2 : Accélération en cartésiennes

Par distribution de l'opérateur $\frac{d}{dt}$, on obtient en cartésiennes

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

Exemple M1.6 : Accélération selon expérience

En reprenant les exemples précédents :

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t)$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t)$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

Attention M1.3 : Accélération

Une accélération peut être négative et peut être nulle :

- ◇ L'accélération étant liée à la **variation du vecteur vitesse**, si la vitesse diminue, l'accélération peut être négative.
- ◇ Pour que l'accélération soit nulle, il faut que **toutes les composantes** de la vitesse soient constantes. Un mouvement peut être à vitesse constante en norme, mais d'accélération non nulle (mouvement circulaire, cf. chapitre M3).

III Exemples de mouvements

III/A Mouvement rectiligne uniforme

Définition M1.12 : Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est dit **uniforme** si la **norme du vecteur vitesse** $\|\vec{v}\|$ est constante ($\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$). Il est dit rectiligne si la trajectoire est une droite.

♥ Application M1.1 : Mouvement rectiligne uniforme

Montrer qu'un mouvement caractérisé $\vec{v}(t) = v_0 \vec{u}_x$ donne un mouvement rectiligne uniforme.

On intègre pour avoir la position :

$$\vec{OM}(t) = v_0 t \vec{u}_x + \vec{OM}(0)$$

ce qui décrit bien une droite dans l'espace. C'est le cas de la chute dans le glycérol.

III/B Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Définition M1.13 : Uniformément accéléré

Un mouvement est dit **uniformément accéléré** si la **norme du vecteur accélération** $\|\vec{a}\|$ est **constante**.

♥ Application M1.2 : Mvt. rect. uniformément accéléré

Déterminer les équations horaires pour un mouvement uniformément accéléré caractérisé par $\vec{a}(t) = -g \vec{u}_y$ avec des conditions initiales nulles ($\vec{OM}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$).

On intègre :

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{u}_y + \underbrace{\vec{v}_0}_{=\vec{0}} \Rightarrow \vec{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \vec{u}_y + \underbrace{\vec{OM}(0)}_{=\vec{0}}$$

D'où les équations horaires :

$$x(t) = 0 \quad ; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad z(t) = 0$$

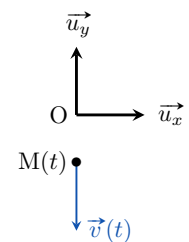


FIGURE M1.7

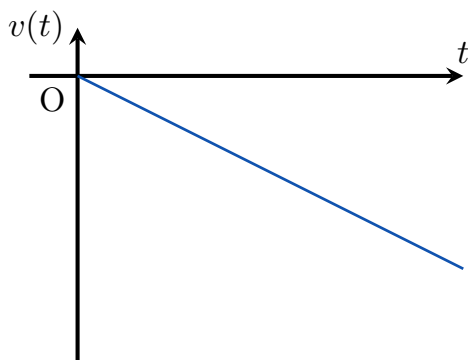


FIGURE M1.8 – Évolution de $v(t)$.

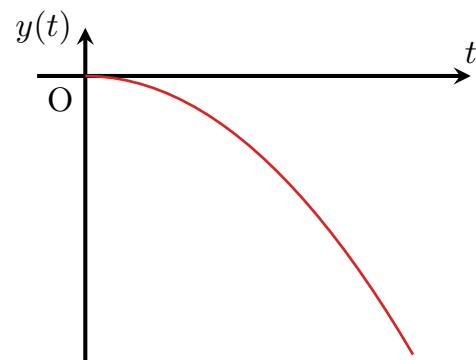


FIGURE M1.9 – Évolution de $y(t)$.

III/C Mouvement courbe uniformément accéléré

♥ Application M1.3 : Mvt. courbe uniformément accéléré

Soit $\vec{a}(t) = -g\vec{u}_y$ avec $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$.

- 1 Déterminer les équations horaires.
- 2 Déterminer l'équation de la trajectoire.

1 On intègre :

$$\vec{v}(t) = -gt\vec{u}_y + \vec{v}(0) = -gt\vec{u}_y + v_0\vec{u}_x \Rightarrow \overrightarrow{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{u}_y + v_0t\vec{u}_x$$

Soit

$$x(t) = v_0t \quad ; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad z(t) = 0$$

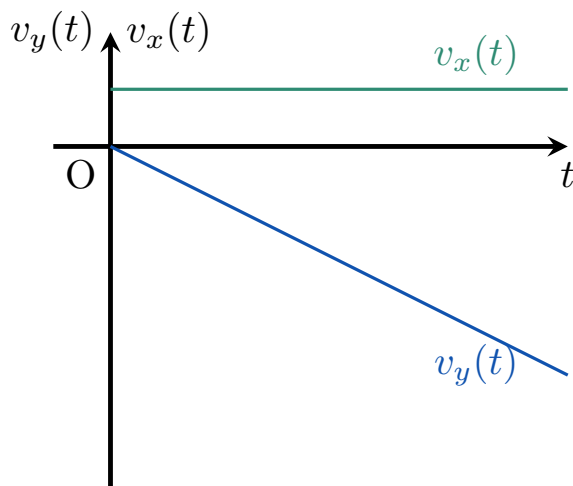


FIGURE M1.10 – Composantes de la vitesse.

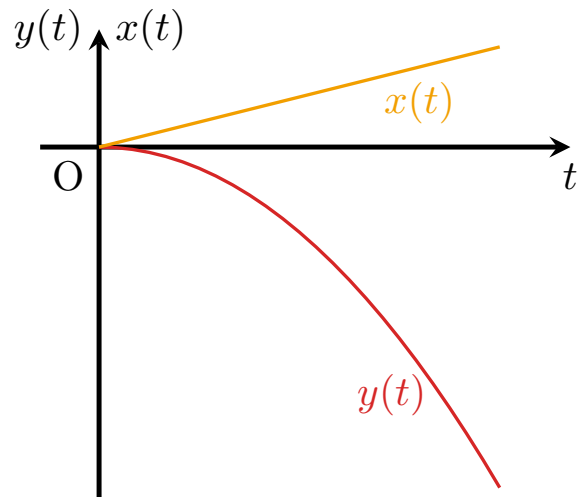


FIGURE M1.11 – Composantes de la position.

2

Pour obtenir la trajectoire, on veut déterminer la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy . Pour cela, exprimons t en fonction de x et remplaçons t dans l'expression de y :

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \Leftrightarrow y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

La trajectoire obtenue est alors une parabole.

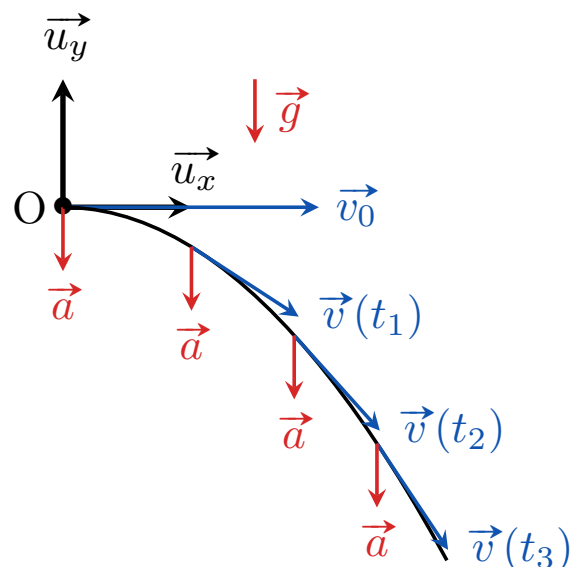


FIGURE M1.12 – Trajectoire parabolique.