Correction du TP

III Analyser

1 On a ici $|\underline{H}_0| = 1$, donc on peut réaliser la même étude qur le RLC sur R :

Tableau TP14.1 – Étude du filtre.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$	$\mathrm{j}\dfrac{x}{Q}$	$-\mathrm{j}\dfrac{1}{xQ}$
$G_{\mathrm{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right)$	$20\log\left(\dfrac{x}{Q}\right)$	$-20\log(Qx)$

On trouvera également $G_{\mathrm{dB}}(x=1) = 20\log\left(\frac{|H_0|}{\sqrt{2}}\right) = -3\,\mathrm{dB}$. Par l'étude des asymptotes, on obtient un passe-bande.

2 On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire

$$H(\omega_r) = H_{\max} \Leftrightarrow 1 + Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2 \text{minimal}$$
$$\Leftrightarrow Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Et ainsi $H_{\max} = H_0$. Pour la bande passante, on commence par déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $|\underline{H}(x_i)| = |H_0|/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
1 + Q^2(x_i - 1/x_i)^2 &= 2 && \sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow Q\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) &= \pm 1 && \times x_i \\
\Leftrightarrow Q{x_i}^2 \mp x_i - Q &= 0 && \text{Discriminant} \\
\Rightarrow \Delta &= 1 + 4Q^2 && \text{Solutions} \\
\Rightarrow x_{i,\pm,\pm} &= \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}
\end{aligned}$$

On obtient alors deux polynômes du second degré (un avec le signe +, l'autre avec le signe −). On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1+4Q^2} > 1$:

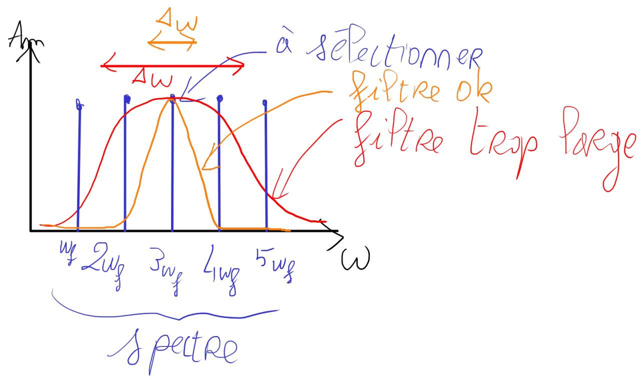
$$x_1 = x_{i,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{i,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)$$

puis on obtient $x_2 - x_1 = 1/Q$ soit au final $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}}$.

3 Pour sélétionner $3\omega_f$, il faut que $\omega_0 = 3\omega_f$, mais aussi que le filtre soit **suffisamment fin** pour que les pulsations $2\omega_f$ et $4\omega_f$ soient atténuées. En représentation spectrale, on obtient la figure suivante :

On cherche donc à avoir :

$$
\begin{aligned}
& \Delta\omega < \omega_f && \text{$\omega_f = \omega_0/3$, $\Delta\omega = 1/RC$} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{RC} < \frac{1}{3}\omega_0 && \omega_0 = \sqrt{\tfrac{\alpha+1}{2\alpha}}\,\tfrac{1}{RC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\cancel{RC}} < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\,\frac{1}{\cancel{RC}} && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & 3^2 < \left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\right)^2 && \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow\ & 9 < \frac{\alpha+1}{2\alpha} && \\
\Leftrightarrow\ & 18\alpha < \alpha + 1 && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\alpha < \frac{1}{17}}
\end{aligned}
$$



Il faut donc avoir α petit pour avoir Q grand et sélectionner précisément des fréquences.

4 Les asymptotes se croisent si

$$
\begin{aligned}
& G_{\mathrm{dB}}(x \to 0) = G_{\mathrm{dB}}(x \to \infty) && \text{On remplace} \\
\Leftrightarrow\ & 20\log(x) - \cancel{20\log Q} = -20\log(x) - \cancel{20\log Q} && \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow\ & \log(x) = 0 && \text{On inverse le log} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{x = 1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{cases} f_{0,\alpha=10^{-2}} = 11{,}4\,\mathrm{kHz} \quad ; \quad G_{\mathrm{dB},10^{-2}} = -17\,\mathrm{dB} \\ f_{0,\alpha=1} = 1{,}6\,\mathrm{kHz} \quad ; \quad G_{\mathrm{dB},1} = 0\,\mathrm{dB} \end{cases}}
$$

Important TP14.1 : Croisement asymptotes

En réalité, les asymptotes se croisent toujours en $x = 1$ (mais il faut savoir le démontrer).

IV Réaliser

5

1 On observe $f_{0,\,\mathrm{exp}} = (11{,}30 \pm 0{,}01)\,\mathrm{kHz}$ avec $\alpha = 10^{-2}$ $\boxed{\alpha R = 1\,\mathrm{k\Omega}}$. On a bien une amplitude de sortie nulle pour les basses **et** hautes fréquences : c'est bien un passe-bande.

2 Non corrigé.

3 On observe $f_{0,\,\mathrm{exp}} = (1{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{kHz}$ avec $\alpha = 1$.

V Valider

4 Voir pages finales.

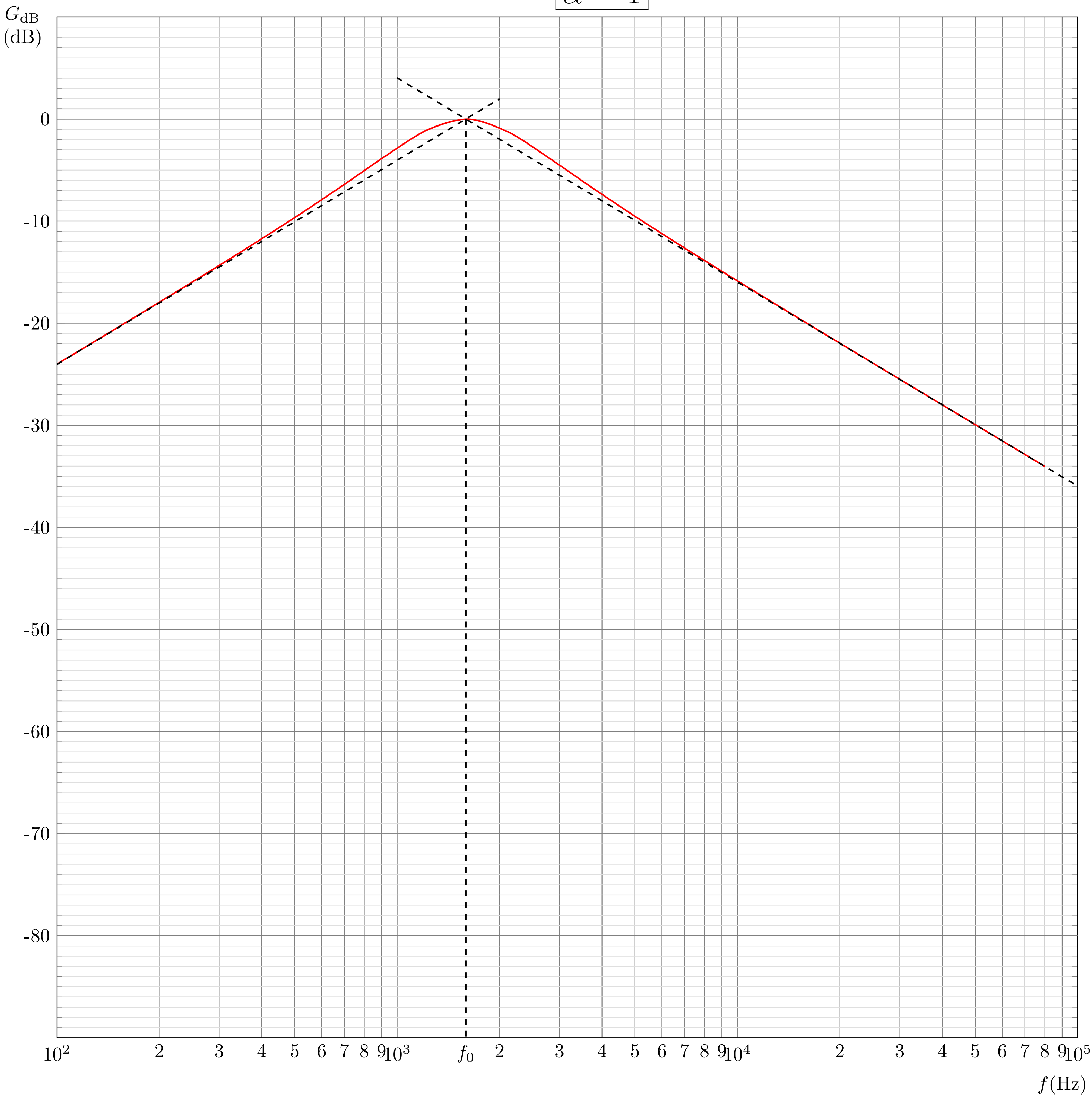
VI Conclure

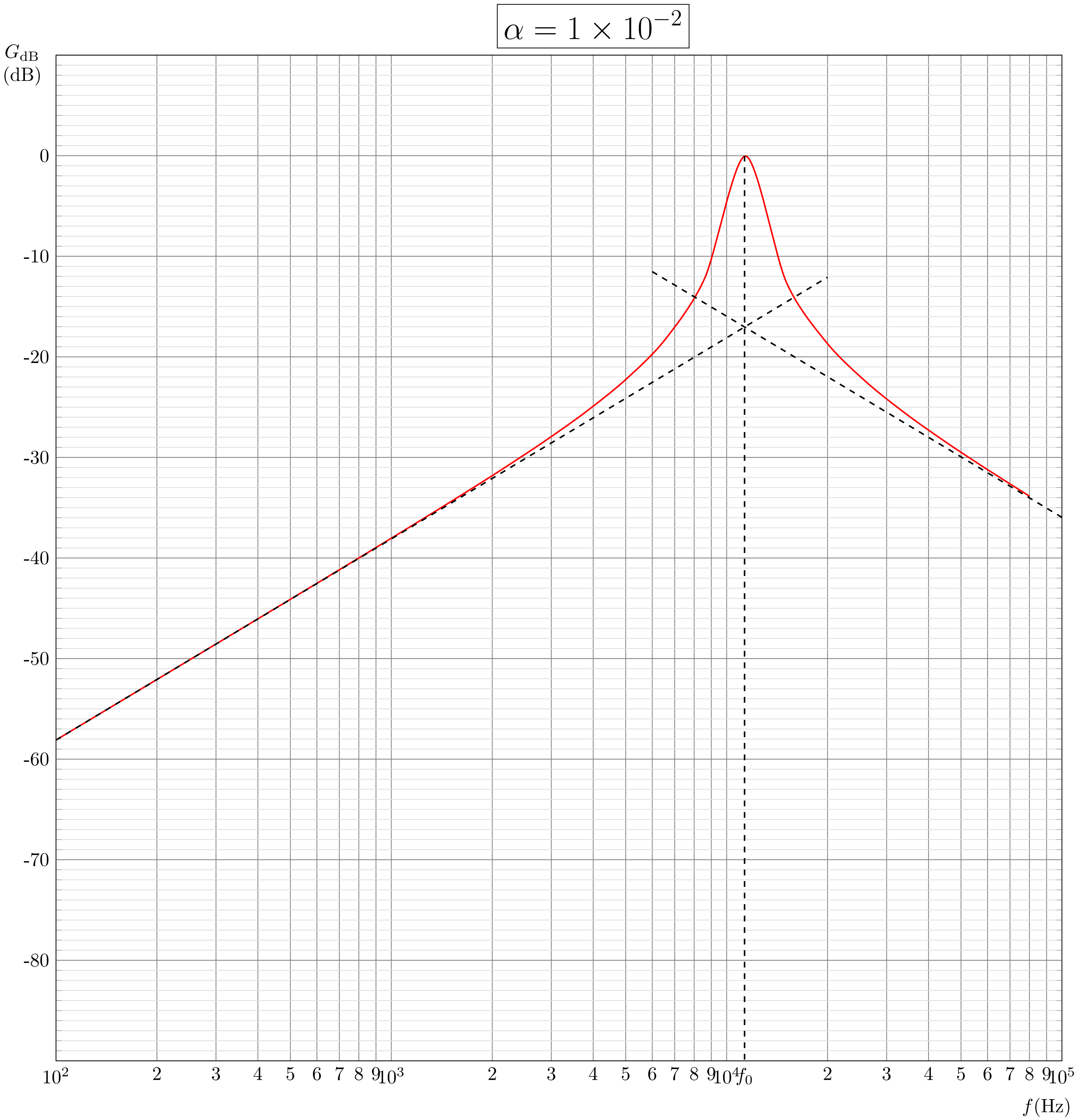
5 Les fréquences de résonance sont différentes, et la forme de la courbe varie : la bande passent est la même, $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$, mais avec l'échelle log le diagramme avec $\alpha = 10^{-2}$ semble plus piquée.

Pour changer Q sans changer ω_0, il faut faire varier C dans le même sens que Q :

$$
\omega_0 = \frac{Q}{RC} \quad ; \quad \omega_0 = \mathrm{cte} \Rightarrow \begin{cases} Q \nearrow \text{ et } C \nearrow \\ Q \searrow \text{ et } C \searrow \end{cases}
$$

$\boxed{\alpha = 1}$





$\alpha = 1 \times 10^{-2}$
G_{dB} (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
10^2
2 3 4 5 6 7 8 9
10^3
2 3 4 5 6 7 8 9
10^4
f_0
2 3 4 5 6 7 8 9
10^5
f (Hz)