Correction du TD d'application

I Collision entre deux voitures

1) Notons M_1 et M_2 les points matériels représentant chacun une des deux voitures. On se limite au mouvement unidimensionnel selon l'axe x et on notera $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives de M_1 et M_2 selon cet axe. Initialement, $x_1(t=0) = d = 20\,\mathrm{m}$ et $x_2(t=0) = 0$.

La voiture M_1 de Xari subit l'accélération (qui est négative donc c'est une décélération) constante a_1. Ainsi, par intégration successive,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + \alpha t + \beta$$

Avec α et β deux constantes d'intégration. En considérant par ailleurs une vitesse initiale v_0 et une position initiale d, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t + d$$

Pour le second véhicule, il faut décomposer le mouvement en deux étapes successives :

- pour $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$, $a = 0$. La position initiale étant par ailleurs nulle et la vitesse initiale étant égale à v_0, il vient, pour $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$:

$$x_2(t) = v_0 t$$

- pour $t > 1$, l'accélération vaut a_2 constante. Notons par ailleurs $t_2 = 1\,\mathrm{s}$. On a par intégration :

$$v_2(t) = a_2 t + \gamma$$

Avec γ une constante à déterminer. Or, par continuité de la vitesse, $v_2(t = t_2) = v_0$. Ainsi,

$$v_2(t) = a_2(t - t_2) + v_0$$

Intégrons une nouvelle fois, avec δ une nouvelle constante d'intégration :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0 t + \delta$$

En utilisant le fait que $x(t_2) = v_0 t_2$, il vient finalement

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0 t$$

2) Il y a contact à l'instant t_c tel que

$$x_1(t_c) = x_2(t_c)$$

Supposons d'abord le contact sur l'intervalle $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$. Il faut alors résoudre :

$$\frac{1}{2}a_1 {t_c}^2 + \cancel{v_0 t_c} + d = \cancel{v_0 t_c}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{-2d}{a_1}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m} \\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :}\ \boxed{t_c = 1{,}41\,\mathrm{s} > 1\,\mathrm{s}}$$

Cette solution est donc exclue puisqu'elle n'est pas en accord avec notre hypothèse initiale $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$.

Supposons maintenant $t_c > 1\,\mathrm{s}$. Il faut résoudre :

$$\frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + \cancel{v_0t_c} + d = \frac{1}{2}a_2(t_c - t_2)^2 + \cancel{v_0t_c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + d = \frac{1}{2}a_2\left({t_c}^2 - 2t_2t_c + {t_2}^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\,{t_c}^2 + a_2t_2t_c + d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2 = 0$$

C'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant Δ est tel que

$$\boxed{\Delta = (a_2t_2)^2 - 2(a_1 - a_2)\left(d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m} \\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ a_2 = -20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ t_2 = 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :}\ \boxed{\Delta = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$
$$\text{D'où}\quad t_{c,\pm} = \frac{-a_2t_2 \pm \sqrt{\Delta}}{(a_1 - a_2)}$$
$$\Leftrightarrow t_{c,+} = -3{,}45\,\mathrm{s} \quad \text{ou} \quad t_{c,-} = 1{,}45\,\mathrm{s}$$

La solution négative étant exclue, on trouve finalement

$$\boxed{t_c = 1{,}45\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1(t_c) = 42{,}5\,\mathrm{m}}$$

Il était donc pratiquement impossible que Pierre esquive Xari, étant donné qu'en freinant au plus tôt il n'a eu que 0,45 s avant de rentrer en collision avec lui, laissant peu de marge à un autre temps de réaction et à une autre manœuvre évasive.

★☆☆ II Masse attachée à 2 ressorts

1) On étudie ici le point matériel M de masse m, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen avec le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$, $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant. On repère le point M par son altitude $\mathrm{OM} = z(t)$. On effectue le **bilan des forces** :

Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$

Ressort 1 $\overrightarrow{F}_{\text{ressort 1}} = -k(\mathrm{OM} - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = -k(z - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$

Ressort 2 $\overrightarrow{F}_{\text{ressort 2}} = +k(\mathrm{O'M} - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = +k(L - z - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$

avec le ressort 1 celui d'en-dessous, le ressort 2 celui d'au-dessus. On notera simplement $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ dans la suite. Avec le PFD, on a

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -mg - k(z - \cancel{\ell_0}) + k(L - z - \cancel{\ell_0})$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{k}{m}L - g}$$

À l'équilibre, le ressort ne bouge plus ; on a donc $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, et on trouve ainsi z_{eq} :

$$\boxed{z_{\mathrm{eq}} = \frac{L}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

Sans la pesanteur, la masse sera à l'équilibre entre les deux ressorts, en toute logique. La gravité diminue cette altitude. On remarque que cette association de ressort est équivalente à avoir un seul ressort de raideur $2k$.

2) On a commencé la détermination de l'équation différentielle dans la question 2. On peut simplifier son expression en remarquant qu'à droite du signe égal, on doit trouver quelque chose homogène à ${\omega_0}^2 z$. On commence par identifier ω_0 avec la forme canonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{donc} \quad \frac{k}{m}L - g = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}$$

et finalement,

$$\boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}}$$

3) ion complète $z(t)$ et la somme de la solution particulière constante z_p et de la solution homogène z_h. La solution particulière est, par définition, z_{eq} (on l'a montré question 1). La solution homogène est celle d'un oscillateur harmonique, à savoir

$$z_h = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Ainsi,

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

◇ $z(0) = z_{\text{eq}} + a$ (masse lâchée d'une hauteur a par rapport à la position d'équilibre), or $z(0) = A + z_{\text{eq}}$, donc

$$A = a$$

◇ $\dot{z}(0) = 0$ (masse lâchée sans vitesse initiale), or $\dot{z}(0) = B\omega_0$ donc

$$B = 0$$

Ainsi, $$\boxed{z(t) = z_{\text{eq}} + a\cos(\omega_0 t)}$$

III Plan incliné et frottements solides

1) On suppose en premier lieu que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements

a –
- ◇ **Système** : {brique}
- ◇ **Référentiel** : galiléen (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$) (voir schéma)
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$
- ◇ **O et t initial** : tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x}$
- ◇ **Bilan des forces** :

Poids $\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$
Réaction $\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$

- ◇ **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}g\sin\alpha \\ \underbrace{m\ddot{y}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R = mg\cos\alpha$$

On intègre la première pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$.

b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt_s\sin\alpha \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g\sin\alpha}}$$

On remarque alors que si $\alpha = 0$, $t_s \to +\infty$, ce qui est logique puisque sans frottement la brique ne s'arrêterait jamais. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g}\frac{{v_0}^2}{g^{\cancel{2}}\sin^{\cancel{2}}\alpha}\cancel{\sin\alpha} + v_0\frac{v_0}{g\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g\sin\alpha}}$$

2) On suppose ensuite qu'il existe des frottements solides, avec f le coefficient de frottements solides tel que $f = 0{,}20$.

a – On reprend le même système, mais le bilan des forces change :

◇ **Bilan des forces** :

Poids $\overrightarrow{P} = -mg\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$

Réaction $\overrightarrow{R} = R_N\,\overrightarrow{u_y} - R_T\,\overrightarrow{u_x}$

En effet, sur la montée de la brique, sa vitesse est dirigée vers $+\overrightarrow{u_x}$, donc la force de frottement (qui est une force de freinage et donc opposée à la vitesse) est dirigée vers $-\overrightarrow{u_x}$. De plus, avec les lois du frottement de Coulomb, sur la montée la brique glisse sur le support, on a donc

$$\boxed{R_T = fR_N}$$

◇ **PFD** :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fR_N \\ \underbrace{\cancel{m\ddot{y}}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R_N = mg\cos\alpha$$

Que l'on réinjecte dans la première :

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

On intègre cette dernière pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. On retrouve le résultat précédent en posant $f = 0$.

b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = g t_s(\sin\alpha + f\cos\alpha) \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

Ce temps est plus **court** que sans frottements. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\frac{{v_0}^2}{(g(\sin\alpha + f\cos\alpha))^{\cancel{2}}} + v_0\frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

3) On suppose finalement que la brique est **posée** sur le plan avec α variable.

a – Cette fois, la brique est initialement à l'arrêt, soit $\vec{a}(0) = \vec{0}$, et la brique ne glisse pas donc $R_T < fR_N$. On aura mouvement quand il y aura glissement, c'est-à-dire quand $R_T = fR_N$. On reprend donc le système précédent avec $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\underbrace{\cancel{m\vec{a}}}_{=\vec{0}} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha - fR_N \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = f\cos\alpha \\ R_N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f = \tan\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \mathrm{atan}(f)}$$

b – On trouve $\boxed{\alpha_{\text{fer/chêne}} = 14°}$ et $\boxed{\alpha_{\text{chêne/chêne}} = 19°}$

4) Avec $\alpha = 0°$, on souhaite déplacer une armoire de 100 kg en tirant dessus avec la force $\vec{F}$. On donne $f_{\text{armoire/sol}} = 0{,}25$.

a – ◇ **Système** : {armoire}

◇ **Référentiel** : (O, $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$) avec $\vec{u_y}$ vertical asendant

◇ **Repère** : On suppose la force de traction dirigée vers $+\vec{u_x}$, et donc la vitesse de l'armoire selon $+\vec{u_x}$

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\vec{u_x}$, $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{u_x}$, $\vec{a} = \ddot{x}(t)\,\vec{u_x}$

◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$
Réaction normale	$\vec{R_N} = R_N\,\vec{u_y}$
Réaction tangentielle	$\vec{R_T} = -R_T\,\vec{u_x}$
Traction	$\vec{F} = F\,\vec{u_x}$

À la limite du glissement, on a $R_T = fR_N$.

◇ **PDF** : quand le mouvement est lancé, l'accélération est nulle.

$$\underbrace{\cancel{m\vec{a}}}_{=0} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T} + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg + R_N \\ 0 = F - fR_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg \\ \boxed{F = fmg} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ f = 0{,}25 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{F = 250\,\mathrm{N}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{F}{g} = 25\,\mathrm{kg}}$$

Ainsi, il suffit de fournir une force égale à un quart du poids.

b – Mettre des patins permet de diminuer le coefficient de frottement, et donc de diminuer la force de traction nécessaire pour déplacer le meuble.

IV Charge soulevée par une grue

1) ◇ **Système** : {masse m} repérée par son centre d'inertie M.

◇ **Référentiel** : relié au sol, galiléen.

◇ **Coordonnées** : cartésiennes, $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, O au pieds de la grue.

◇ **BDF** : avant qu'elle ne décolle, il y a la réaction du sol ; on s'intéresse au décollage, donc au moment où elle s'annule. On aura donc

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Tension} & \overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{u_z} \end{array}$$

◇ **PFD** : au moment où la masse décolle, son accélération est positive et selon $\overrightarrow{u_z}$, soit $\overrightarrow{a} = \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$; en supposant un décollage en douceur, $\ddot{z} \approx 0$, soit

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow 0 = -mg + T \Leftrightarrow \boxed{T = mg}$$

On a donc la tension égale au poids.

2) Dans ce cas, on a explicitement $\boxed{T = m(a_v + g)}$

La tension est supérieure au poids, et fonction affine de a_v : si l'accélération est trop forte, le câble peut rompre.

3) La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite (figure **??**) avec une accélération a_h constante.

a – L'accélération de M est $\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}$. Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ constant : ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{a}_h}$$

On a alors le PFD :

$$m\overrightarrow{a}_h = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow ma_h\,\overrightarrow{u_x} = -mg\,\overrightarrow{u_z} + T\cos\alpha\,\overrightarrow{u_z} + T\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$$

b – Ainsi,
$$\begin{cases} ma_h = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{a_h}{g} \\ T = m\sqrt{{a_h}^2 + g^2} \end{cases}}$$