

# Approche énergétique du mouvement

## Sommaire

<b>I Puissance et énergie cinétique</b> . . . . .	<b>3</b>
I/A Notions énergétiques de base . . . . .	3
I/B Puissance d'une force . . . . .	3
I/C Théorème de la puissance cinétique . . . . .	4
<b>II Travail d'une force et énergie cinétique</b> . . . . .	<b>6</b>
II/A Travail d'une force . . . . .	6
II/B Exemples de travaux . . . . .	6
<b>III Énergie potentielle</b> . . . . .	<b>8</b>
III/A Forces conservatives et non-conservatives . . . . .	8
III/B Énergie potentielle . . . . .	9
III/C Lien entre énergie potentielle et force conservative . . . . .	10
<b>IV Énergie mécanique</b> . . . . .	<b>12</b>
IV/A Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	12
IV/B Théorème de la puissance mécanique . . . . .	13
<b>V Énergie potentielle et équilibres</b> . . . . .	<b>13</b>
V/A Notion d'équilibre . . . . .	13
V/B Équilibres stables et instables . . . . .	14
V/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable . . . . .	15
<b>VI Énergie potentielle et trajectoire</b> . . . . .	<b>16</b>
VI/A Détermination qualitative d'une trajectoire . . . . .	16
VI/B Cas du pendule simple . . . . .	17

## Capacités exigibles

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Puissance et travail d'une force dans un référentiel.</li> <li><input type="checkbox"/> Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.</li> <li><input type="checkbox"/> Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.</li> <li><input type="checkbox"/> Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.</li> <li><input type="checkbox"/> Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.</li> <li><input type="checkbox"/> Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.</li> <li><input type="checkbox"/> Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.</li> <li><input type="checkbox"/> Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.</li> <li><input type="checkbox"/> Distinguer force conservative et force non conservative, reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.</li> <li><input type="checkbox"/> Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.</li> <li><input type="checkbox"/> Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.</li> </ul> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

✓ L'essentiel

☰ Définitions

<input type="checkbox"/> M4.1 : Énergie . . . . .	3
<input type="checkbox"/> M4.2 : Puissance en terme d'énergie . .	3
<input type="checkbox"/> M4.3 : Puissance d'une force . . . . .	3
<input type="checkbox"/> M4.4 : Énergie cinétique . . . . .	4
<input type="checkbox"/> M4.5 : Travail d'une force . . . . .	6
<input type="checkbox"/> M4.6 : Forces conservatives ou non . .	8
<input type="checkbox"/> M4.7 : Force conservative et énergie po- tentielle . . . . .	9
<input type="checkbox"/> M4.8 : Gradient (cartésien) . . . . .	10
<input type="checkbox"/> M4.9 : Opérateur différentiel d . . . . .	11
<input type="checkbox"/> M4.10 : Énergie mécanique . . . . .	12
<input type="checkbox"/> M4.11 : Point à l'équilibre . . . . .	14
<input type="checkbox"/> M4.12 : Équilibres stables et instables .	14

⚠ Propriétés

<input type="checkbox"/> M4.1 : Conservation de l'énergie . . . .	3
<input type="checkbox"/> M4.2 : Travail du poids . . . . .	8
<input type="checkbox"/> M4.3 : Travail de HOOKE . . . . .	9
<input type="checkbox"/> M4.4 : Énergie potentielle de pesanteur	9
<input type="checkbox"/> M4.5 : Énergie potentielle élastique . .	10
<input type="checkbox"/> M4.6 : Force conservative et énergie po- tentielle . . . . .	11
<input type="checkbox"/> M4.7 : Équilibre et énergie potentielle .	14
<input type="checkbox"/> M4.8 : Stabilité des positions d'équilibre	15
<input type="checkbox"/> M4.9 : Mouvement autour d'un équilibre stable . . . . .	15

☰ Démonstrations

<input type="checkbox"/> M4.1 : Travail du poids . . . . .	9
<input type="checkbox"/> M4.2 : Travail de HOOKE . . . . .	9
<input type="checkbox"/> M4.3 : Énergie potentielle de pesanteur	9
<input type="checkbox"/> M4.4 : Énergie potentielle élastique . .	10
<input type="checkbox"/> M4.5 : Force conservative et énergie po- tentielle . . . . .	11
<input type="checkbox"/> M4.6 : Équilibre et énergie potentielle .	14
<input type="checkbox"/> M4.7 : Stabilité des positions d'équilibre	14
<input type="checkbox"/> M4.8 : Mouvement autour d'un équilibre stable . . . . .	16

» Implications

<input type="checkbox"/> M4.1 : Vocabulaire et conséquence du travail . . . . .	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : $W_{AB}$ pour $\vec{F}$ constante . . . . .	6

⚠ Théorèmes

<input type="checkbox"/> M4.1 : de la puissance cinétique . . . . .	5
<input type="checkbox"/> M4.2 : de l'énergie cinétique . . . . .	8
<input type="checkbox"/> M4.3 : de l'énergie mécanique . . . . .	12
<input type="checkbox"/> M4.4 : de la puissance mécanique . . . .	13

☰ Preuves

<input type="checkbox"/> M4.1 : Théorème de la puissance cinétique	5
<input type="checkbox"/> M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique	7
<input type="checkbox"/> M4.3 : Théorème de l'énergie mécanique	12
<input type="checkbox"/> M4.4 : Théorème de la puissance méca- nique . . . . .	13

✍ Applications

<input type="checkbox"/> M4.1 : Puissance du poids en pente . .	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : Conséquence énergétique des frot- tements . . . . .	5
<input type="checkbox"/> M4.3 : Pendule <i>via</i> TPC . . . . .	5
<input type="checkbox"/> M4.4 : Travail des frottements solides .	6
<input type="checkbox"/> M4.5 : Travail des frottements fluides .	7
<input type="checkbox"/> M4.6 : Vitesse maximale en skis . . . .	8
<input type="checkbox"/> M4.7 : Calcul de dérivées partielles . .	11
<input type="checkbox"/> M4.8 : TEM appliqué au ski . . . . .	12
<input type="checkbox"/> M4.9 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle . . . . .	15

📌 Remarques

<input type="checkbox"/> M4.1 : Étude mouvement équilibre instable	16
--------------------------------------------------------------------	----

🔗 Exemples

<input type="checkbox"/> M4.1 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,el}$ par le gradient . . .	11
---------------------------------------------------------------------------------------------------	----

🔧 Outils

<input type="checkbox"/> M4.1 : Calculer une puissance . . . . .	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : Quand appliquer le TPC? . . . .	5
<input type="checkbox"/> M4.3 : TEC ou PFD? . . . . .	8
<input type="checkbox"/> M4.4 : Système conservatif et TEM . . .	13

♥ Points importants

<input type="checkbox"/> M4.1 : Travail et chemin . . . . .	6
<input type="checkbox"/> M4.2 : Trajectoire et énergie potentielle	16

⚠ Erreurs communes

<input type="checkbox"/> M4.1 : Notations $\delta$ vs. d . . . . .	6
<input type="checkbox"/> M4.2 : Gradient et systèmes de coordon- nées . . . . .	10

# I Puissance et énergie cinétique

## I/A Notions énergétiques de base

### I/A) 1 Énergie

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tous les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

#### Définition M4.1 : Énergie

L'énergie d'un système est sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité : le **Joule** (J)

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie.

#### Propriété M4.1 : Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

### I/A) 2 Puissance

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. On définit pour ça la puissance d'un système :

#### Définition M4.2 : Puissance en terme d'énergie

La **puissance**  $\mathcal{P}$  d'un système traduit la **variation temporelle** de son énergie  $\mathcal{E}$ , et on a

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des  $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ , et se compte couramment en **Watts** (W). On a

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

Pratique pour retrouver son unité, cette expression est cependant peu utilisée ; en effet, lors de l'étude mécanique d'un corps, on connaît moins facilement son énergie que sa vitesse ou les forces qui s'y appliquent.

## I/B Puissance d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

- ◇ Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.
- ◇ Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique, c'est la réaction tangentielle qui le freine.

#### ♥ Définition M4.3 : Puissance d'une force

Unité

Les **watts** (W).

### Implication M4.1 : Vocabulaire et conséquence du travail

- ◇
- ◇

### ♥ Outils M4.1 : Calculer une puissance

On peut calculer une puissance avec deux formes mathématiques équivalentes :

- ◇ En utilisant une base de projection, *par exemple* cartésienne, on décompose la force et la vitesse :

et

On a alors

- ◇ En utilisant une autre définition du produit scalaire :

avec  $\alpha$  l'angle entre les vecteurs.

### ♥ Application M4.1 : Puissance du poids en pente

Exprimer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle  $\alpha$ .

Dans la base  $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$  :

**FIGURE M4.1** – Schéma

Ainsi, dans le référentiel de la route :

## I/C Théorème de la puissance cinétique

### ♥ Définition M4.4 : Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point M de masse  $m$  et de vitesse  $v_{M/\mathcal{R}}(t)$  est :

L'unité d'une énergie est en **joules** (J), et dépend du référentiel.

On relie l'effet d'une force à la variation d'énergie cinétique par l'équation suivante :

### ♥ Preuve M4.1 : Théorème de la puissance cinétique

Deux méthodes possibles pour la démonstration :

Bilan de puissance

Définition de  $\mathcal{E}_c$

### ♥ Théorème M4.1 : de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation instantanée de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la somme des puissances de forces qui s'exercent sur ce point :

### ♥ Application M4.2 : Conséquence énergétique des frottements

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

$\Rightarrow$   $\Rightarrow$

### ♥ Application M4.3 : Pendule *via* TPC

Établir l'équation différentielle du pendule.

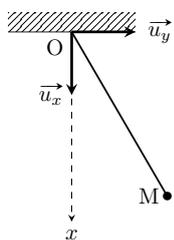


FIGURE M4.2 –  
Pendule

Le mouvement étant circulaire,  $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et on a

$\Rightarrow$

De plus,  $\vec{v} \perp \vec{T}$  et l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{P}$  est  $\pi/2 + \theta$  :

et

TPC  $\Rightarrow$

### ♥ Outils M4.2 : Quand appliquer le TPC ?

- ◇ Si le mouvement est **selon une seule coordonnée** ( $x$ ,  $y$  ou  $z$  en cartésiennes,  $\theta$  en coordonnées cylindriques), il sera pertinent d'utiliser le TPC.
- ◇ Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

## II Travail d'une force et énergie cinétique

### II/A Travail d'une force

Sur un incrément de temps  $dt$ , l'effet d'une force sur la vitesse un corps peut également se traduire directement par une variation d'énergie totale, plutôt qu'une variation temporelle d'énergie, d'où :

#### ♥ Définition M4.5 : Travail d'une force

##### Travail élémentaire

Le travail élémentaire  $\delta W$  d'une force  $\vec{F}$  sur un point M lors d'un déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  est :

##### Travail total

Le travail  $W_{AB}$  d'une force  $\vec{F}$  sur un chemin  $C$  allant du point A au point B est

Il s'agit de l'énergie fournie par la force  $\vec{F}$  au point M le long de la trajectoire

#### ♥ Important M4.1 : Travail et chemin

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

#### ♥ Attention M4.1 : Notations $\delta$ vs. $d$

$\delta \Rightarrow$  grandeur totale dépend *a priori* du chemin et de la vitesse.  $d \Rightarrow$  grandeur dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée; or  $W$  défini sur une **distance**, pas ~~en un point~~ :

On peut faire  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  et  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

mais pas  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{v} dt$  ou  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

#### ♥ Implication M4.2 : Travail d'une force constante sur un segment

Le travail  $W_{AB}$  d'une force **constante**  $\vec{F}$  sur un **segment**  $\vec{AB}$  est

### II/B Exemples de travaux

#### ♥ Application M4.4 : Travail des frottements solides

Soit un objet de  $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$ , soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal.

Il subit la force  $\vec{f} = -f \vec{u}_x$  sur la distance de freinage  $D$

- Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?
- Que vaut  $\mathcal{E}_{c,0}$  l'énergie cinétique initiale?  $\mathcal{E}_{c,\infty}$  sont énergie cinétique finale? Que peut-on en conclure ?

1

2


**♥ Application M4.5 : Travail des frottements fluides**

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour  $v = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  puis  $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . On donne  $S = 3,07 \text{ m}^2$ ,  $c_x = 0,33$ ,  $\rho = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

**FIGURE M4.3** – Schéma

**II/B) 1** Théorème de l'énergie cinétique

Si la puissance donne la variation instantanée de l'énergie cinétique, alors sa variation totale sur un intervalle quelconque s'obtient par **intégration** :


**♥ Preuve M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique**


### ♥ Théorème M4.2 : de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , un point matériel M de masse  $m$ , d'énergie cinétique  $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$  et subissant les forces extérieures  $\vec{F}_i$  sur la distance AB vérifie

### ♥ Application M4.6 : Vitesse maximale en skis

Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de  $h = 5$  m de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

◇

◇

◇

### ♥ Outils M4.3 : TEC ou PFD ?

- ◇ Si l'on veut connaître seulement une vitesse/une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.
- ◇ Si on cherche les équations horaires/un temps/une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

## III Énergie potentielle

### III/A Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail **peut** dépendre du chemin suivi. Cependant, dans certains cas, le travail ne dépend que des coordonnées des points de départ et d'arrivée ; ce sont des forces particulières à cet égard, d'où la définition :

### ♥ Définition M4.6 : Forces conservatives ou non

Une force est dite **conservative** si son travail de A à B ne dépend pas du chemin suivi ou de la vitesse, mais uniquement des **positions A et B**. Elle est non-conservative dans le cas contraire.

### ♥ Propriété M4.2 : Travail du poids

Le poids est une force conservative, et pour  $\vec{u}_z$  un axe vertical, on a

avec  $-$  pour  $\vec{u}_z$  vertical **ascendant**.

### ♥ Démonstration M4.1 : Travail du poids

Pour  $\vec{u}_z$  ascendant,

On a  $\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$  et  $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

D'où  $\delta W = -mg dz$   $\Rightarrow$   $\delta W = -d(mgz)$  ■

### ♥ Propriété M4.3 : Travail de HOOKE

La force de rappel d'un ressort est conservative, et pour  $\vec{u}_x$  dans le sens ressort-masse :

### Démonstration M4.2 : Travail de HOOKE

On a  $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$  et  $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

D'où  $\delta W = -kx dx$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$   $\delta W = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$  ■

## III/B Énergie potentielle

Dans le cas d'une force conservative, on remarque qu'on peut donc légitimement écrire  $\delta W$  avec une forme différentielle  $d$  plutôt qu'avec  $\delta$ , définissant l'**énergie potentielle** d'une force :

### ♥ Définition M4.7 : Force conservative et énergie potentielle

À une force **conservative**  $\vec{F}_{\text{cons}}$  s'associe une énergie **potentielle**  $\mathcal{E}_p$  telle que :

Une énergie potentielle est définie à une constante près donc peut être négative

### ♥ Propriété M4.4 : Énergie potentielle de pesanteur

Le poids est une force conservative, et son énergie potentielle s'écrit

avec  $+$  pour  $\vec{u}_z$  vertical ascendant.

### Démonstration M4.3 : Énergie potentielle de pesanteur

Pour  $\vec{u}_z$  vertical ascendant, on a montré à l'instant que

### ♥ Propriété M4.5 : Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est une force conservative, et son énergie potentielle s'écrit

### Démonstration M4.4 : Énergie potentielle élastique

Pour  $\vec{u}_x$  dans le sens ressort-masse, on a montré que

## III/C Lien entre énergie potentielle et force conservative

Pour exprimer une force conservative  $\vec{F}_{\text{cons}}$  associée à une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(M)$  connue, on utilise l'opérateur **gradient** :

### ♥ Définition M4.8 : Gradient (cartésien)

L'opérateur **gradient**, noté  $\vec{\text{grad}}$  ou parfois  $\vec{\nabla}$ <sup>1</sup>, appliqué à une fonction **scalaire**  $f(x,y,z)$ , donne :

$\Leftrightarrow$

avec  $\frac{\partial}{\partial x}$  la **dérivée partielle** ( $\partial$  se lit « d rond ») de  $f$  par rapport à la variable  $x$ , les autres variables étant constantes.

Le vecteur gradient indique la direction de la **plus forte augmentation** et est perpendiculaire aux lignes de niveau (i.e. courbes telles que  $f(x,y,z) = \text{cte}$ ).

### ♥ Attention M4.2 : Gradient et systèmes de coordonnées

L'opérateur gradient dépend des coordonnées. Notamment, en coordonnées cylindriques, on a

$$\vec{\text{grad}} f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

*Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.*

1. Notation interdite au concours, mais vous le verrez plus tard, très utile pour retenir les formules...


**♥ Application M4.7 : Calcul de dérivées partielles**

Soit  $f(x,y,z) = xy^2$ . Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .

---

Cet opérateur permet alors de définir la différentielle d'une fonction de manière univoque :


**♥ Définition M4.9 : Opérateur différentiel d**

La différentielle d'une fonction scalaire  $f$  est

Et on obtient :


**♥ Propriété M4.6 : Force conservative et énergie potentielle**

Une force conservative  $\vec{F}_{\text{cons}}$  dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  selon la relation :

avec  $\mathcal{E}_p$  définie donc à une constante près.


**♥ Démonstration M4.5 : Force conservative et énergie potentielle**

On a

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$



**♥ Exemple M4.1 :  $\mathcal{E}_{p,p}$  et  $\mathcal{E}_{p,el}$  par le gradient**

◇ Énergie potentielle de pesanteur :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ , soit

Ainsi,  $\mathcal{E}_{p,p}$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$ , et peut s'écrire comme

◇ Énergie potentielle élastique :  $\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$ , soit

Ainsi,  $\mathcal{E}_{p,el}$  ne dépend ni de  $y$ , ni de  $z$ , et peut s'écrire comme

## IV Énergie mécanique

### IV/A Théorème de l'énergie mécanique

#### ♥ Définition M4.10 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  d'un point matériel en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

#### ♥ Preuve M4.3 : Théorème de l'énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergies potentielles permet d'écrire :

avec  $\vec{F}_{\text{NC},i}$  les forces non-conservatives. ■

#### ♥ Théorème M4.3 : de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

Ce n'est qu'une reformulation du TEC, en séparant forces conservatives et non-conservatives, et en exprimant le travail des forces conservatives comme un énergie potentielle.

#### ♥ Application M4.8 : TEM appliqué au ski

Exprimer l'énergie mécanique d'une skieuse en haut et en bas d'une piste de ski, et retrouver sa vitesse.

$\mathcal{E}_m$  en haut

$\mathcal{E}_m$  en bas

Sans frottements, on a juste  $W_{\text{AB}}(\vec{N}) = 0 = \Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_m$ , donc



### ♥ Outils M4.4 : Système conservatif et TEM

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

- 1) Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;
- 2) Comme l'énergie mécanique se conserve,  $\sum_i W_{AB}(\vec{F}_{NC,i}) = 0$ , et on conclut donc en utilisant  $\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B)$ .

## IV/B Théorème de la puissance mécanique



### ♥ Théorème M4.4 : de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :



### ♥ Preuve M4.4 : Théorème de la puissance mécanique

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles, selon le point de départ. Par exemple avec un bilan de puissance :

■

## V Énergie potentielle et équilibres

### V/A Notion d'équilibre

L'énergie potentielle permet de d'étudier les caractéristiques d'équilibre d'un système. On suppose :

- ◇ Un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou de puissance nulle (**système conservatif**), en notant  $\mathcal{E}_p$  l'énergie potentielle totale et  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{cons,i}$  la somme des forces conservatives.
- ◇ On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté  $x$  ( $x$  peut être une longueur mais aussi un angle, dans le cas du pendule par exemple).



◇ Si c'est un équilibre **stable**, la force doit **ramener** le point  $x$  vers sa position d'équilibre :

et si  $(x - x_{eq}) < 0$ , alors  $F$  doit être  $> 0$ , mais la conclusion est la même.

◇ Si c'est un équilibre **instable**, la force doit l'**écarter** de la position d'équilibre :

et si  $(x - x_{eq}) < 0$ , alors  $F$  doit être  $< 0$ , mais la conclusion est la même.

### ♥ Propriété M4.8 : Stabilité des positions d'équilibre

Une position d'équilibre est :

Stable si

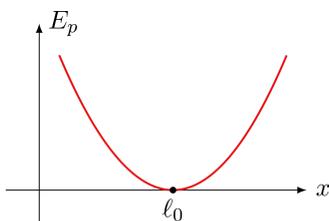
Instable si

FIGURE M4.6 – Équilibre stable

FIGURE M4.7 – Équilibre instable

### ♥ Application M4.9 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable?



### V/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

### ♥ Propriété M4.9 : Mouvement autour d'un équilibre stable

Tout système au voisinage d'un point d'équilibre stable est un oscillateur harmonique.

### ♥ Démonstration M4.8 : Mouvement autour d'un équilibre stable

En faisant un développement limité de l'énergie potentielle d'un système autour d'une position d'équilibre stable, on a

Et si l'énergie mécanique se conserve, on a  $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$  donc

On retrouve  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  avec  $k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$  ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  avec  $k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$ .

Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.

### ♥ Remarque M4.1 : Étude mouvement équilibre instable

Si l'équilibre est instable :  $k = -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$

d'où par le même raisonnement,  $\ddot{x} - \frac{k}{m}(x - x_{\text{eq}}) = 0$

de solution  $x - x_{\text{eq}} = Ae^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t}$

Si  $x(0) = x_0$  et  $v(0) = 0$  :  $x - x_{\text{eq}} = x_0 \text{ch}(\omega_0 t)$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile **s'écarte exponentiellement** de cette position.

## VI Énergie potentielle et trajectoire

### VI/A Détermination qualitative d'une trajectoire

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle. En effet,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p$$

puisque l'énergie cinétique est positive. Ainsi :

### ♥ Important M4.2 : Trajectoire et énergie potentielle

Dans un diagramme d'énergie potentielle selon  $x$  :

- ◇
- ◇
- ◇

État lié

La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.

FIGURE M4.8 – État lié

État de diffusion

La particule aura tendance à partir vers  $x = +\infty$  sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.

FIGURE M4.9 – État de diffusion

Certains corps célestes sont dans des états liés, comme la Terre et le Soleil, d'autres dans des états de diffusion : ils passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. C'est le cas de la comète d'AREND-ROLAND, passée à proximité de la Terre en 1956 mais qui ne devrait jamais revenir. Une animation est disponible [en ligne](#).

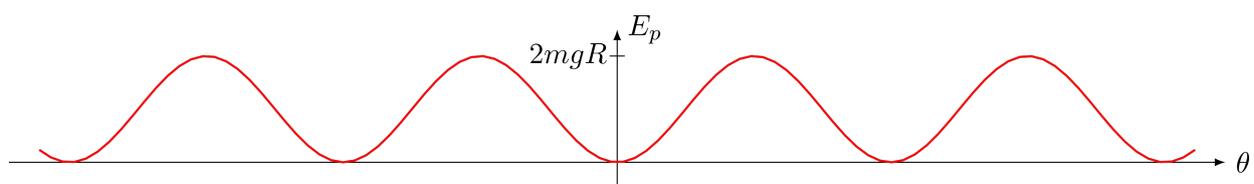
## VI/B

 Cas du pendule simple

On reprend le pendule simple, que l'on suppose attaché avec une tige **rigide** (pour éviter les décrochages). On souhaiterait déterminer ses positions d'équilibre et étudier ses trajectoires possibles. Le système étant conservatif ( $\vec{P}$  conservatif et  $\vec{T} \perp \vec{v}$ ), déterminons l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle.

L'altitude est :

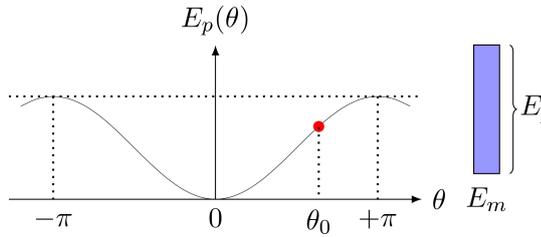
donc l'énergie potentielle est



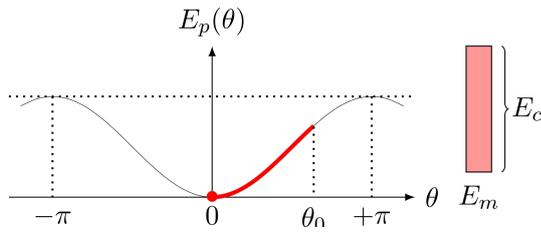
Les positions d'équilibre stables sont donc celles dans les « creux », soit  $\theta = 2p\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ , et les instables sur les « collines », soit  $\theta = (2p + 1)\pi$ . On distingue alors deux cas :

◇ **Cas  $\mathcal{E}_m < 2mgl$**

Si l'énergie mécanique totale est inférieure à l'énergie potentielle maximale, on se situera dans un état lié, « coincé » dans un creux. On observera donc une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche, et on a vu que cette oscillation était sinusoïdale aux très petits angles ( $|\theta| < 20^\circ$ ).



**FIGURE M4.10** – État initial  $\theta = \theta_0$  : toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, et l'énergie est nulle.

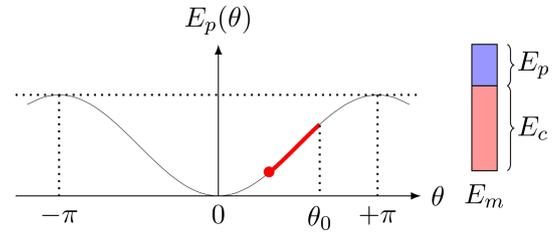


**FIGURE M4.12** – La masse a perdu toute son énergie potentielle : son énergie cinétique et donc sa vitesse sont maximales.

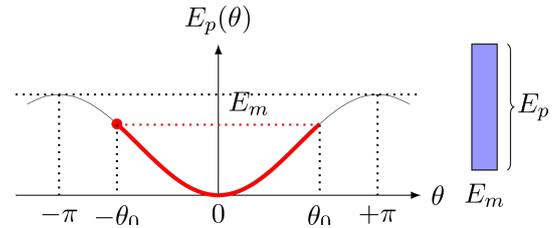
◇ **Cas  $\mathcal{E}_m > 2mgl$**

Si l'énergie mécanique totale est supérieure à l'énergie potentielle maximale, ça veut dire qu'il y a un excédent d'énergie cinétique. Ainsi, le pendule tourne autour de l'axe de rotation, et lorsqu'il arrive en  $\theta = \pi$  l'énergie potentielle est maximale mais l'énergie cinétique n'est pas nulle : il continue sa rotation, sans oscillation. La vitesse n'est cependant pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas du mouvement (par conservation de l'énergie mécanique).

Une animation est disponible en ligne<sup>2</sup>.



**FIGURE M4.11** – La masse perd de l'énergie potentielle tout en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



**FIGURE M4.13** – La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximale  $-\theta_0$ , et repart dans l'autre sens.

2. [https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension\\_pendule.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php)