Correction du TD d'application

I Projection de vecteurs

1) Si α vaut 0, $\overrightarrow{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_x}$. On sait donc que la projection de $\overrightarrow{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u_x}$. On le remarque également avec le triangle rectangle OMH, avec M le bout de $\overrightarrow{v_0}$ et H son projeté orthogonal sur $\overrightarrow{u_x}$: la longueur OH est en effet $v_0 \cos\alpha$.

   Si α vaut $\pi/2$, $\overrightarrow{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$. On sait donc que la projection de $\overrightarrow{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u_z}$. On le remarque également en prenant le triangle rectangle OMJ, avec cette fois J le projeté orthogonal de M sur $\overrightarrow{u_z}$: la longueur OJ est en effet $v_0 \sin\alpha$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + v_0 \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}}$$

2) Avec la même réflexion, on trouve

$$\boxed{\overrightarrow{T} = T\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + T\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}}$$

   La méthode est la même pour $\overrightarrow{N}$, mais le résultat est différent. En effet, si $\alpha = 0$, $\overrightarrow{N}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $N\cos\alpha\overrightarrow{u_z}$. Si $\alpha = \pi/2$, $\overrightarrow{N}$ est selon $-\overrightarrow{u_x}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $-N\sin\alpha\overrightarrow{u_x}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{N} = -N\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + N\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}}$$

3) Toujours même réflexion : si $\theta = 0$, $\overrightarrow{P}$ est selon $\overrightarrow{e_r}$, et si $\theta = \pi/2$, $\overrightarrow{P}$ est selon $-\overrightarrow{e_\theta}$. $\overrightarrow{T}$ est, par définition, selon $-\overrightarrow{e_r}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{P} = mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_r} - mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{e_r}}$$

4) Ici aussi :

   ◇ $\alpha = 0 \Rightarrow \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_Y} = -1 \quad (\overrightarrow{P} \text{ selon } -\overrightarrow{e_Y})$

   ◇ $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_X} = 1 \quad (\overrightarrow{P} \text{ selon } \overrightarrow{e_X})$

   Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{P} = mg(\sin(\alpha)\,\overrightarrow{e_X} - \cos(\alpha)\,\overrightarrow{e_Y})} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{e_Y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_X}}$$

   D'où

$$\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin\alpha - T \\ -mg\cos\alpha + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}}$$

5) On projette :

$$\overrightarrow{F}_g = F_g(\cos\alpha\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\overrightarrow{u_x}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_d = F_d(\cos\beta\overrightarrow{u_y} + \sin\beta\overrightarrow{u_x})$$

   et avec l'égalité de vecteurs on obtient

$$\begin{cases} 0 = F_d\sin\beta - F_g\sin\alpha \\ 0 = -mg + F_g\cos\alpha + F_d\cos\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg = F_g\cos\alpha + F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg\sin\beta = F_g(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_d = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \\ F_g = \dfrac{mg\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \end{cases}}$$

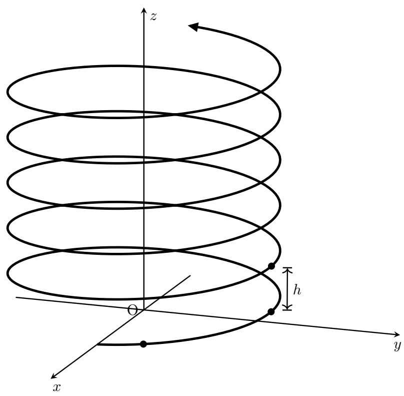
Les applications numériques, **non demandées**, donnent

$$\boxed{\begin{cases} F_d = 4{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \\ F_g = 5{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \end{cases}}$$

II Mouvement hélicoïdal

1) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r} + \alpha t\overrightarrow{u_z} \\
\overrightarrow{v}(t) &= \underbrace{\cancel{\dot{R}\overrightarrow{u_r}}}_{=0} + R\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\overrightarrow{u_z} + \alpha t\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t}}}_{=0} \\
&= R\omega\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\overrightarrow{u_z} \\
\overrightarrow{a}(t) &= R\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{=0}\overrightarrow{u_\theta} - R\omega^2\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{0} \\
&= -R\omega^2\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$



2) Cf. ci-dessus.

3) Soit t_0 un instant quelconque. Un point à ce temps-là est tel que

$$\begin{cases} r(t_0) = R \\ \theta(t_0) = \omega t_0 \\ z(t_0) = \alpha t_0 \end{cases}$$

Le premier point qui est au même angle θ mais avec 2π de plus se trouve donc à t_1 tel que

$$\begin{aligned}
&\theta(t_1) = \theta(t_0) + 2\pi \\
\Leftrightarrow\ &\omega t_1 = \omega t_0 + 2\pi \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&z(t_1) - z(t_0) = h = \alpha t_1 - \alpha t_0 \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{h = 2\pi\frac{\alpha}{\omega}}
\end{aligned}$$

4) $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2} =$ cte, donc il est uniforme. Il est circulaire ssi $\boxed{\alpha = 0}$.

5) En regardant dans le plan polaire, on trouve $x(t)$ et $y(t)$:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = \alpha t \end{cases}}$$

☆☆★ III Masse du Soleil

1) On étudie le système {Terre} dans le référentiel héliocentrique. La Terre étant sur une orbite circulaire, on utilise un repère polaire (S,$\overrightarrow{u_r}$,$\overrightarrow{u_\theta}$) en appelant S le centre de gravité du Soleil et T le centre de gravité de la Terre. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} = R\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a} = \underbrace{\cancel{R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}}_{\ddot{\theta}=0} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$

étant donné que la distance Terre-Soleil est fixe, et que la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est constante. On a d'ailleurs, en appelant $\omega = \dot{\theta}$ cette vitesse angulaire,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec T_0 la période de révolution de la Terre autour du Soleil, telle que $T_0 = 365{,}26 \times 24 \times 3600\mathrm{s} = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$. Ainsi, la seule force s'exerçant sur la Terre étant l'attraction gravitationnelle du Soleil, on a avec le PFD :

$$M_T\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_g \Leftrightarrow -\cancel{M_T}R\omega^2 = -\mathcal{G}\frac{\cancel{M_T}M_S}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_S = \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2R^3}{\mathcal{G}{T_0}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI} \\ T_0 = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}$$

☆☆★ IV Course de F1

1) La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2) Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

3) Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

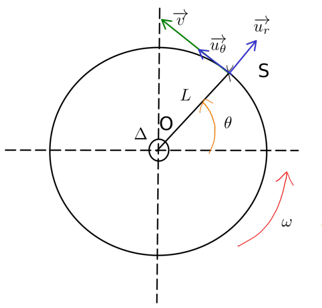
d'où les résultats

$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, ALONSO va plus vite que BUTTON pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus courte des deux**, soit ici **celle la plus large**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart... ?

V Entraînement d'une spationaute

1)
- **Système** : {spationaute}
- **Référentiel** : référentiel du laboratoire, supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ selon le sens de rotation
- **Repérage** :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) &= L\overrightarrow{u_r}\\
\vec{v}_S(t) &= L\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}\\
\vec{a}_S(t) &= L\dot{\omega}(t)\overrightarrow{u_\theta} - L\omega^2(t)\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

2) Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{v}_S(t) = L\omega_0\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\overrightarrow{u_r} \end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\vec{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

3)

$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ L = 10{,}0\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\text{A.N.} \;:\; \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour{\cdot}s^{-1}}} \tag{3.2}$$

Ordre de grandeur M3.1 :
- Accélération latérale en F1 : [4 ; 5] g ;
- Accélération latérale en avion de chasse : [9 ; 10] g pendant quelques secondes max ;
- Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- Accélération négative frontale en accident de voiture : [40 ; 60] g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.