Correction du TD d'entraînement

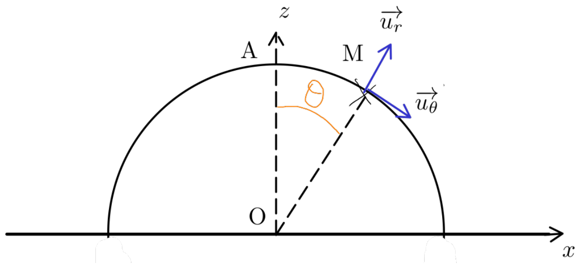
I Glissade d'un pingouin sur un igloo

1) ◇ **Système** : {pingouin}

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ **dans le sens de** θ

◇ **Repérage** :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r}\\
\overrightarrow{v}(t) &= R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\\
\overrightarrow{a}(t) &= R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **Origine et instant initial** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} &\Rightarrow \theta(0) = 0\\
\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} &\Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0
\end{aligned}$$

◇ **BDF** :

Poids $\overrightarrow{P} = mg(-\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$
Réaction $\overrightarrow{R} = R_N\overrightarrow{u_r}$

◇ **PFD** :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & (3.1)\\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta & (3.2)\end{cases}}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

2) En prenant (3.2)$\times\dot{\theta}$, on a

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta\\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) &= \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta)\\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^{t} &= \frac{g}{R}\left[-\cos\theta\right]_{t=0}^{t}\\
\Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}
\end{aligned}$$

■

3) En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

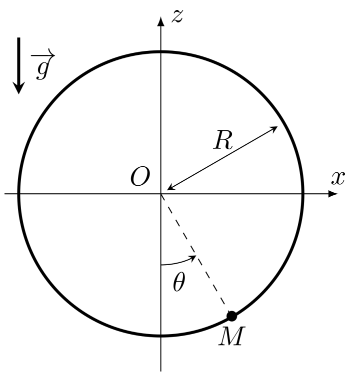
$$R_N = mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4) La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

$$R_N = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Une application numérique donne $\boxed{\theta = 48{,}2°}$.

II Oscillations d'un anneau sur un cerceau



1) L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

2) ◇ **Système** : {anneau}

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\text{O},\vec{u_r},\vec{u_\theta})$ avec $\vec{u_\theta}$ dans le sens de θ

◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = R\vec{u_r}$$
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

◇ **BDF** :

Poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{u_r} - \sin\theta\vec{u_\theta})$
Réaction $\vec{R} = -R_N\vec{u_r}$

◇ **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta - R_N \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = R_N \\ mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{3.3}$$

3) Avec (3.3), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0} \tag{3.4}$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

4) On a donc

$$\boxed{\theta(0) = 0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = v_0\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$$

L'équation (3.4) se simplifie avec $\sin\theta \approx \theta$, pour donner

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Et avec les CI,

$$\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0}$$
$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

5) La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $v_0/(R\omega_0)$, quand le sinus vaut ± 1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit

$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$

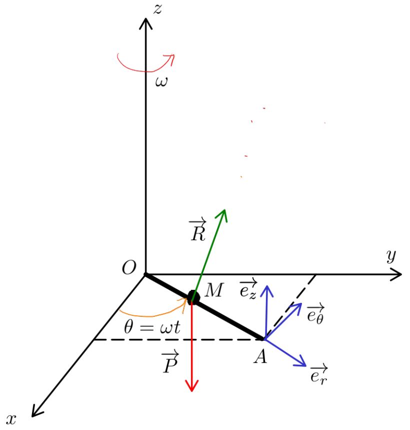
☆☆ III Anneau sur une tige en rotation

1) ◇ **Système** : {anneau} point matériel M de masse m

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

◇ **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O},\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$

◇ **Repérage** :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\vec{e_r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\
&= \dot{r}\vec{e_r} + r\omega\vec{e_\theta} \\
\vec{a} &= \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\omega\vec{e_\theta} - r\omega^2\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0} \\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e_r} + 2\dot{r}\omega\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

◇ **Conditions initiales** :

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

◇ **BDF** : pas de frottements donc pas de composante sur $\overrightarrow{e_r}$:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e_z} \\ \textbf{Réaction support} & \overrightarrow{R} = R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + R_z\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

◇ **PFD** :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (3.5) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (3.6) \\ R_z = mg & (3.7) \end{cases}}$$

2) On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \\ \Rightarrow\ & s^2 - \omega^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & s^2 = \omega^2 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{s = \pm\omega} \end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI

$$: \begin{aligned} &r(0) = r_0 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{r_0 = A + B} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\dot{r}(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = A\omega - B\omega \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{A = B} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)}$$

3) On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\overrightarrow{e_\theta} + mg\overrightarrow{e_z}}$$

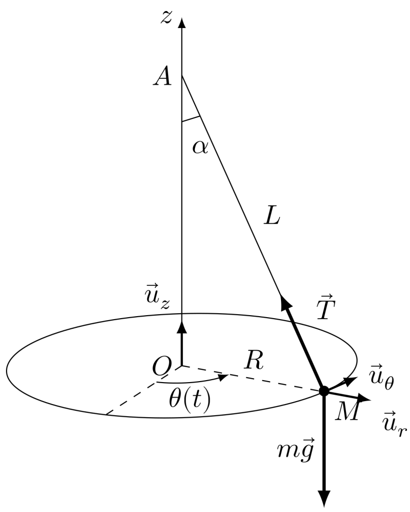
4) L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned} &\ell = r_0 \operatorname{ch}(\omega t) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega t)} \end{aligned}$$

IV Pendule conique

2)

- **Système** : {M} masse m
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ (voir schéma)



- **Repérage** : $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\overrightarrow{u_r}\\
\vec{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
&= L\omega\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
\vec{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

- **BDF** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Tension $\vec{T} = T(-\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$

3) On applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

4) Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

5) On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$