Mécanique – chapitre 4

Approche énergétique du mouvement

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Puissance et travail d'une force dans un référentiel.
- ☐ Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.
- ☐ Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
- ☐ Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.
- ☐ Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.
- ☐ Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.
- ☐ Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.
- ☐ Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.
- ☐ Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
- ☐ Distinguer force conservative et force non conservative, reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.
- ☐ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- ☐ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Implications

Théorèmes

Preuves

Applications

Remarques

Exemples

Outils

Points importants

Erreurs communes

I Puissance et énergie cinétique

I/A Notions énergétiques de base

I/A) 1 Énergie

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tous les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

Définition M4.1 : Énergie

L'énergie d'un système est sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité : le **Joule** (J)

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie.

Propriété M4.1 : Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

I/A) 2 Puissance

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. On définit pour ça la puissance d'un système :

Définition M4.2 : Puissance en terme d'énergie

La **puissance** $\mathcal{P}$ d'un système traduit la **variation temporelle** de son énergie $\mathcal{E}$, et on a

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des $\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$, et se compte couramment en **Watts** (W). On a

$$\boxed{1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}}$$

Pratique pour retrouver son unité, cette expression est cependant peu utilisée ; en effet, lors de l'étude mécanique d'un corps, on connaît moins facilement son énergie que sa vitesse ou les forces qui s'y appliquent.

I/B Puissance d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

- Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.
- Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.
- Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.
- Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique, c'est la réaction tangentielle qui le freine.

♥ Définition M4.3 : Puissance d'une force

$$\boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}}$$

Unité

Les **watts** (W).

Implication M4.1 : Autour de la puissance

◇ Si $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) > 0$, on dit que la force est **motrice** ; si $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) < 0$ elle est **résistante**.

◇ $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \vec{F}}$ (ou $\vec{F} = \vec{0}$, ou $\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = \vec{0}$).

Outils M4.1 : Calculer une puissance

On peut calculer une puissance avec deux formes mathématiques équivalentes :

◇ En utilisant une base de projection, *par exemple* cartésienne, on décompose la force et la vitesse :

$$\vec{F} = F_x\vec{u_x} + F_y\vec{u_y} + F_z\vec{u_y} = \begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = v_x\vec{u_x} + v_y\vec{u_y} + v_z\vec{u_z} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$$

On a alors
$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = v_xF_x + v_yF_x + v_zF_z} = \begin{matrix}\\+\\+\end{matrix}\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix} \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$$

◇ En utilisant une autre définition du produit scalaire :

$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\| \cos(\alpha)}$$

avec α l'angle entre les vecteurs.

Application M4.1 : Puissance du poids en pente

Exprimer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle α.

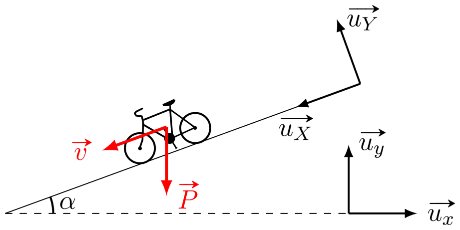


FIGURE M4.1 – Schéma

Dans la base $(\vec{u_X},\vec{u_Y})$:

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\vec{u_Y} + \sin\alpha\vec{u_X})$$
$$\text{et} \quad \vec{v} = v\vec{u_X}$$

Ainsi, dans le référentiel de la route :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = mgv\sin\alpha} \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{poids moteur}$$

Dans le cas de la montée, on inverse le sens de $\vec{v}$, et le poids devient résistant.

I/C Théorème de la puissance cinétique

Définition M4.4 : Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point M de masse m et de vitesse $v_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,\mathrm{M}\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}^2(t)}$$

L'unité d'une énergie est en $\boxed{\textbf{joules}}$ (J), et dépend du référentiel.

On relie l'effet d'une force à la variation d'énergie cinétique par l'équation suivante :

Preuve M4.1 : Théorème de la puissance cinétique

Deux méthodes possibles pour la démonstration :

Bilan de puissance

$$
\begin{aligned}
m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\
\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} &= \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \\
\Leftrightarrow & \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c\mathrm{M}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Définition de $\mathcal{E}_c$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\right) \\
&= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} &= \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\cdot\vec{v} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Théorème M4.1 : de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation instantanée de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la somme des puissances de forces qui s'exercent sur ce point :

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c\mathrm{M}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)}
$$

Implication M4.2 : Conséquence des frottements

Les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique. En effet,

$$
\vec{F}_f\cdot\vec{v} < 0 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_f) < 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} < 0}
$$

Application M4.2 : Pendule *via* TPC

Établir l'équation différentielle du pendule.

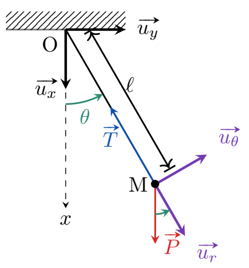


Figure M4.2 – Pendule

Le mouvement étant circulaire, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}(t)\vec{u_\theta}$ et on a

$$
\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t)
$$

De plus, $\mathcal{P}(\vec{T}) = \underbrace{\vec{T}\cdot\vec{v}(t)}_{\vec{T}\perp\vec{v}} = 0$ et $\widehat{(\vec{P},\vec{v})} = \pi/2+\theta$

$$
\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{v}(t) = mg\cdot\ell\dot{\theta}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -mg\ell\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t))
$$

$$
\text{TPC } \cancel{m\ell^2\dot{\theta}(t)}\ddot{\theta}(t) = -\frac{\cancel{mg}\cancel{\ell}\cancel{\dot{\theta}(t)}\sin(\theta(t))}{\cancel{m}\cancel{\ell^2}\dot{\theta}(t)} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t)+\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0} \qquad \blacksquare
$$

Outils M4.2 : Quand appliquer le TPC ?

- Si le mouvement est **selon une seule coordonnée** (x, y ou z en cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il sera pertinent d'utiliser le TPC.
- Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

II Travail d'une force et énergie cinétique

II/A Travail d'une force

II/A) 1 Définitions

Sur un incrément de temps dt, l'effet d'une force sur la vitesse un corps peut également se traduire directement par une variation d'énergie totale, plutôt qu'une variation temporelle d'énergie, d'où :

Définition M4.5 : Travail d'une force

Travail élémentaire

Le travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ sur un point M lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) \cdot \mathrm{d}t}$$

Travail total

Le travail W_{AB} d'une force $\vec{F}$ sur un chemin $\mathcal{C}$ allant du point A au point B est

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W}$$

Il s'agit de l'énergie fournie par la force $\vec{F}$ au point M le long de la trajectoire

Important M4.1 : Travail et chemin

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

Attention M4.1 : Notations δ vs. d

$\delta \Rightarrow$ grandeur totale dépend *a priori* du chemin et de la vitesse. d $\Rightarrow$ grandeur dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée ; or W défini sur une **distance**, pas ~~**en un point**~~ :

On peut faire $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_c(\mathrm{A})$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

mais pas $\cancel{\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = W(\mathrm{B}) - W(\mathrm{A})}$ ou $\cancel{\mathrm{d}W = W(t+\mathrm{d}t) - W(t)}$

Implication M4.3 : Travail d'une force constante sur un segment

Le travail W_{AB} d'une force **constante** $\vec{F}$ sur un **segment** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

II/A) 2 Exemples de travaux

Application M4.3 : Travail des frottements solides

Soit un objet de $\vec{v}(0) = v_0\vec{u_x}$, soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal.

Il subit la force $\quad \vec{T} = -fmg\vec{u_x} \quad$ sur la distance de freinage $\quad D = \dfrac{{v_0}^2}{2fg}$

1. Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?
2. Que vaut $\mathcal{E}_{c,0}$ l'énergie cinétique initale ? $\mathcal{E}_{c,\infty}$ sont énergie cinétique finale ? Que peut-on en conclure ?

1

$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\Leftrightarrow W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \|\vec{F}\|\cdot\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|\cdot\cos(\pi)$$

$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = fmg\cdot\frac{{v_0}^2}{2fg}\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}m{v_0}^2}$$

Le travail étant négatif, on dit qu'il est (et que la force est) **résistant**(e).

2

$$\mathcal{E}_{c,0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{c,\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c}$$

On observe que l'énergie initiale du système, son énergie cinétique, a été dissipée par la force de frottements et est quantifiée par le travail de cette force sur le chemin suivi.

Application M4.4 : Travail des frottements fluides

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v\vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour $v = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ puis $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. On donne $S = 3{,}07\,\mathrm{m^2}$, $c_x = 0{,}33$, $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Convertir en litres d'essence consomée, sachant que $1\,\mathrm{L} = 3{,}15\times10^7\,\mathrm{J}$.

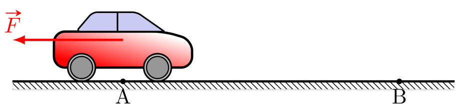


FIGURE M4.3 – Schéma

$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = F\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos(\pi) = -F\cdot\mathrm{AB}$$

Le travail est négatif, la force est résistante.

- ◇ $W_{\mathrm{AB},50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}(\vec{F}) = -1{,}27\times10^7\,\mathrm{J}$, soit $\approx 0{,}4\,\mathrm{L}$ d'essence ;
- ◇ $W_{\mathrm{AB},80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}(\vec{F}) = -3{,}25\times10^7\,\mathrm{J}$, soit $\approx 1\,\mathrm{L}$ d'essence.

II/B Théorème de l'énergie cinétique

Si la puissance donne la variation instantanée de l'énergie cinétique, alors sa variation totale sur un intervalle quelconque s'obtient par **intégration** :

Preuve M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{cM}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)$$

Séparation des variables

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{E}_c = \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$\int(\cdot)$ et $\int\sum = \sum\int$

$$\Rightarrow \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\mathrm{d}\mathcal{E}_c = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum_i\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Infinitésimal à total

$$\Leftrightarrow \Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = \sum_i\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\delta W_i = \boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_i)}$$

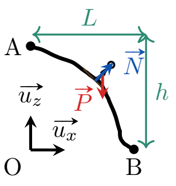
■

Théorème M4.2 : de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un point matériel M de masse m, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$ et subissant les forces extérieures $\overrightarrow{F}_i$ sur la distance AB vérifie

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}(\mathrm{B}) - \mathcal{E}(\mathrm{A}) = \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{F}_i)}$$

Application M4.5 : Vitesse maximale en skis



Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de $h = 5\,\mathrm{m}$ de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

- $\mathcal{E}_c(\mathrm{A}) = 0 \quad$ et $\quad \mathcal{E}_c(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$
- $\delta W(\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{N}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{N}) = 0$
- $W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{P}) = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = mg(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}) = mgh$
- $\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{P}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$

Outils M4.3 : TEC ou PFD ?

- Si l'on veut connaître seulement une vitesse/une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.
- Si on cherche les équations horaires/un temps/une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

III Énergie potentielle

III/A Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail **peut** dépendre du chemin suivi. Cependant, dans certains cas, le travail ne dépend que des coordonnées des points de départ et d'arrivée ; ce sont des forces particulières :

Définition M4.6 : Forces conservatives ou non

Une force est dite **conservative** si son travail de A à B ne dépend pas du chemin suivi ou de la vitesse, mais uniquement des **positions A et B**. Elle est non-conservative dans le cas contraire.

Propriété M4.2 : Travail du poids

Le poids est une force conservative, et pour $\overrightarrow{u_z}$ un axe vertical, on a

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = \pm mg\,\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{P}) = \pm mg\Delta_{\mathrm{AB}}z$$

avec $-$ pour $\overrightarrow{u_z}$ vertical **ascendant**.

Démonstration M4.1 : Travail du poids

Pour $\overrightarrow{u_z}$ ascendant,

On a $\quad \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z} \quad$ et $\quad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$

D'où $\quad \delta W = -mg\,\mathrm{d}z \Rightarrow W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -mg\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}z \quad \blacksquare$

Propriété M4.3 : Travail de Hooke

La force de rappel d'un ressort est conservative, et pour $\overrightarrow{u_x}$ dans le sens ressort–masse :

$$\delta W = -k(\ell(t)-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell \quad \Rightarrow \quad W_{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{2}k\left((\ell_{\mathrm{B}}-\ell_0)^2 - (\ell_{\mathrm{A}}-\ell_0)^2\right)$$

Démonstration M4.2 : Travail de Hooke

On a $\quad \overrightarrow{F}_r = -k(\ell(t)-\ell_0)\overrightarrow{u_x} \quad$ et $\quad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$

D'où $\quad \delta W = -k(\ell(t)-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell$

$$\Rightarrow W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -k\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\ell-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell = -k\left[\frac{1}{2}(\ell-\ell_0)^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{2}k\left((\ell_{\mathrm{B}}-\ell_0)^2 - (\ell_{\mathrm{A}}-\ell_0)^2\right)} \quad \blacksquare$$

III/B Énergie potentielle

Dans le cas d'une force conservative, on remarque qu'on peut donc légitimement écrire δW avec une forme différentielle d plutôt qu'avec δ, définissant l'**énergie potentielle** d'une force :

Définition M4.7 : Travail d'une force conservative et énergie potentielle

À une force **conservative** $\overrightarrow{F}_{\mathrm{cons}}$ s'associe une énergie **potentielle** $\mathcal{E}_p$ telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta W(\overrightarrow{F}_{\mathrm{cons}}) &= -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{F}_{\mathrm{cons}}) &= -\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_p(\mathrm{A})) \end{aligned}}$$

Une énergie potentielle est définie à une constante près donc peut être négative

Propriété M4.4 : Énergie potentielle de pesanteur

Le poids est une force conservative, et son énergie potentielle s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,p} = \pm mgz + \mathrm{cte}$$

avec + pour $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant.

Démonstration M4.3 : Énergie potentielle de pesanteur

Pour $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, on a montré à l'instant que

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = -mg\,\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}(mgz) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,p} \quad \blacksquare$$

Propriété M4.5 : Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est une force conservative, et son énergie potentielle s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k\left(\ell(t) - \ell_0\right)^2 + \mathrm{cte}$$

Démonstration M4.4 : Énergie potentielle élastique

Pour $\overrightarrow{u_x}$ dans le sens ressort–masse, on a montré que

$$\delta W(\overrightarrow{F}_r) = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\mathrm{d}\ell = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k\left(\ell(t) - \ell_0\right)^2\right) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}} \qquad \blacksquare$$

III/C Lien entre énergie potentielle et force conservative

Pour exprimer une force conservative $\overrightarrow{F}_{\mathrm{cons}}$ associée à une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\mathrm{M})$ connue, on utilise l'opérateur **gradient** :

Définition M4.8 : Gradient (cartésien)

L'opérateur **gradient**, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ ou parfois $\overrightarrow{\nabla}$[1], appliqué à une fonction **scalaire** $f(x,y,z)$, donne :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

avec $\dfrac{\partial}{\partial x}$ la **dérivée partielle** (∂ se lit « d rond ») de f par rapport à la variable x, les autres variables étant constantes.

Le vecteur gradient indique la direction de la **plus forte augmentation** et est perpendiculaire aux lignes de niveau (i.e. coubres telles que $f(x,y,z) = \mathrm{cte}$).

Attention M4.2 : Gradient et coordonnées

L'opérateur gradient dépend des coordonnées. Notamment, en coordonnées cylindriques, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.

1. Notation interdite au concours, mais vous le verrez plus tard, très utile pour retenir les formules...

Application M4.6 : Calcul de dérivées partielles

Soit $f(x,y,z) = xy^2$. Déterminer les dérivées partielles de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Cet opérateur permet alors de définir la différentielle d'une fonction de manière univoque :

Définition M4.9 : Opérateur différentiel d

La **différentielle** d'une fonction **scalaire** f est

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \Leftrightarrow \text{« } \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \text{ »}$$

Propriété M4.6 : Force conservative et énergie potentielle

Une force **conservative** $\overrightarrow{F}_{\text{cons}}$ dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$ selon la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathcal{E}_p}$$

avec $\mathcal{E}_p$ définie donc à une constante près.

Démonstration M4.5 : Force conservative et énergie potentielle

On a

$$\begin{aligned} \delta W(\overrightarrow{F}_{\text{cons}}) &= -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{F}_{\text{cons}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathcal{E}_p \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ \Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathcal{E}_p} \end{aligned}$$

■

Exemple M4.1 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ par le gradient

◇ **Énergie potentielle de pesanteur** : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathcal{E}_{p,p}$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial z} = -mg$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{p,p}$ ne dépend ni de x, ni de y, et peut s'écrire comme $\boxed{mgz + \text{cte}}$

◇ **Énergie potentielle élastique** : $\overrightarrow{F}_r = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathcal{E}_{p,\text{el}}$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial x} = -k(x - \ell_0) \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial z} = 0$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ ne dépend ni de y, ni de z, et peut s'écrire comme $\boxed{\frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}}$

IV Énergie mécanique

IV/A Théorème de l'énergie mécanique

Définition M4.10 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{tot}}}$$

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

Preuve M4.3 : Théorème de l'énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergies potentielles permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\text{TEC :} & \Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_c &= \sum_n W_{\text{AB}}(\vec{F}_n) \\
&\Leftrightarrow & \Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_c &= \sum_j \underbrace{W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{cons},j})}_{=-\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_{p,j}} + \sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i}) \\
&\Leftrightarrow & \underbrace{\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_c + \Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_{p,\text{tot}}}_{\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_m} &= \sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i})
\end{aligned}$$

$\vec{F}_n = \vec{F}_{\text{cons},j} + \vec{F}_{\text{NC},i}$

$\sum_j \Delta\mathcal{E}_{p,j} = \Delta\mathcal{E}_{p,\text{tot}}$

■

avec $\vec{F}_{\text{NC},i}$ les forces non-conservatives.

Théorème M4.3 : de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\boxed{\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(\text{B}) - \mathcal{E}_m(\text{A}) = \sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i})}$$

Ce n'est qu'une reformulation du TEC, en séparant forces conservatives et non-conservatives, et en exprimant le travail des forces conservatives comme un énergie potentielle.

Application M4.7 : TEM appliqué au ski

Exprimer l'énergie mécanique d'une skieuse en haut et en bas d'une piste de ski, et retrouver sa vitesse.

$\mathcal{E}_m$ en haut $\qquad \mathcal{E}_m(\text{A}) = \dfrac{1}{2}m{v_\text{A}}^2 + mgz_\text{A} = 0 + mgh$

$\mathcal{E}_m$ en bas $\qquad \mathcal{E}_m(\text{B}) = \dfrac{1}{2}m{v_\text{B}}^2 + mgz_\text{B} = \dfrac{1}{2}mv^2 + 0$

Sans frottements, on a juste $W_{\text{AB}}(\vec{N}) = 0 = \Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_m$, donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Outils M4.4 : Système conservatif et TEM

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

1) Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;

2) Comme l'énergie mécanique se conserve, $\sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) = 0$, et on conclut donc en utilisant $\mathcal{E}_m(\mathrm{A}) = \mathcal{E}_m(\mathrm{B})$.

IV/B Théorème de la puissance mécanique

Théorème M4.4 : de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{dt}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i})}$$

Preuve M4.4 : Théorème de la puissance mécanique

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles ; par exemple avec un bilan de puissance :

$$\begin{aligned}
&\text{PFD :} \quad m\vec{a} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{cons},j} + \sum_i \vec{F}_{\mathrm{NC},i} && \\
\Leftrightarrow \quad & m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec{v} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{cons},j} \cdot \vec{v} + \sum_i \vec{F}_{\mathrm{NC},i} \cdot \vec{v} && \text{PFD} \cdot \vec{v} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\sum_j \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,j} \cdot \vec{v} + \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) && \text{Définition et } \vec{F}_{\mathrm{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{dt}} + \sum_j \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) && \mathcal{E}_c = \tfrac{1}{2}mv^2 \text{ et } \vec{v} = \tfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\mathrm{tot}})}{\mathrm{dt}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) && \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}\mathcal{E}_{p,j}
\end{aligned}$$

■

Application M4.8 : Pendule simple par TPM

Établir l'équation différentielle du pendule simple par le TPM.

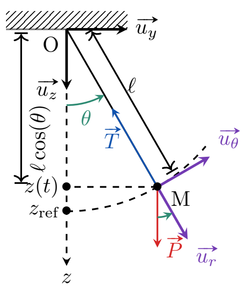


FIGURE M4.4 – Pendule

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}(t)\vec{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2(t)$$

$$\begin{cases} z(t) = -\ell\cos(\theta(t)) \\ z_{\mathrm{ref}} = -\ell \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mg\,(z(t) - z_{\mathrm{ref}}) = mg\ell\,(1 - \cos(\theta(t)))$$

De plus, $\quad \mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}(t) = 0 \quad$ car $\quad \vec{T} \perp \vec{v}$

$$\text{TPM :} \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{dt}} = 0 \Leftrightarrow \cancel{m\ell^2\dot{\theta}(t)}\ddot{\theta}(t) + \frac{\cancel{mg\ell}\cancel{\dot{\theta}(t)}\sin(\theta(t))}{\cancel{m\ell^2}\cancel{\dot{\theta}(t)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0}$$

■

V Énergie potentielle et équilibres

V/A Notion d'équilibre

Définition M4.11 : Hypothèses étude équilibre

- On s'intéresse à un **système conservatif**, en notant $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle totale et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{cons},i}$ la somme des forces conservatives.
- On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté x (x peut être une longueur mais aussi un angle, dans le cas du pendule par exemple).

Définition M4.12 : Point à l'équilibre

Un point est à l'équilibre s'il est immobile dans le référentiel d'étude, soit

$$\boxed{\vec{F}(x = x_{\text{eq}}) = \vec{0}}$$

Démonstration M4.6 : Équilibre et énergie potentielle

Or, $\vec{F}$ conservative donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\text{OM}}$

- Si le degré de liberté x est une longueur, on aura $\delta W = F_x\,\mathrm{d}x \Rightarrow F_x = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}$;
- Si le degré de liberté x est un angle θ, on aura $\delta W = F_\theta r\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}$.

Dans tous les cas, $F_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = 0$, d'où la propriété suivante.

Propriété M4.7 : Équilibre et énergie potentielle

Les points d'équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté correspondent à un point stationnaire de l'énergie potentielle :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0} \qquad \text{où } (\cdot)_{x_0} \text{ signifie « } \cdot \text{ évalué en } x_0 \text{ »}$$

V/B Équilibres stables et instables

Définition M4.13 : Équilibres stables et instables

Soit un point matériel sur une position d'équilibre. En l'écartant un peu de cette position :

- s'il **revient** vers sa position d'équilibre, on dit que l'équilibre est **stable** ;
- s'il s'**écarte** définitivement de cette position, on dit qu'il est **instable**.

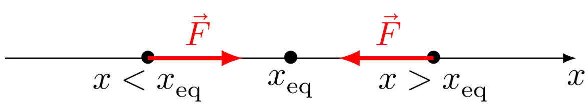


Figure M4.5 – Équilibre stable

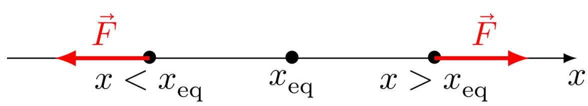


Figure M4.6 – Équilibre instable

Propriété M4.8 : Formule de Taylor-Young

Par définition, la tangente en un point permet de passer d'une coordonnée x_0 à la coordonnée x un peu plus loin en suivant la fonction affine de pente égale à la tangente. D'une manière générale, ce résultat se généralise avec toutes les dérivées d'une fonction f :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n \qquad f(x) \underset{x \approx x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x_0} + o(x^n)$$

Démonstration M4.7 : Stabilité des positions d'équilibre

Pour étudier ces situations mathématiquement, on peut développer l'expression de la somme $\overrightarrow{F}$ au voisinage d'un point d'équilibre x_{eq} quelconque :

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{\text{eq}}} && \Big\downarrow\ F = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\\
\Leftrightarrow F(x) &= -\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{\text{eq}}} - (x - x_{\text{eq}}) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} && \Big\downarrow\ F(x_{\text{eq}}) = 0 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{\text{eq}}}\\
\Leftrightarrow F(x) &= -(x - x_{\text{eq}}) \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{\text{eq}}}
\end{aligned}$$

◇ S'il est **stable**, la force doit **ramener** le point x vers sa position d'équilibre (Figure M4.5) :

$$(x - x_{\text{eq}}) > 0 \Rightarrow F < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$$

et si $(x - x_{\text{eq}}) < 0$, alors F doit être > 0, mais la conclusion est la même.

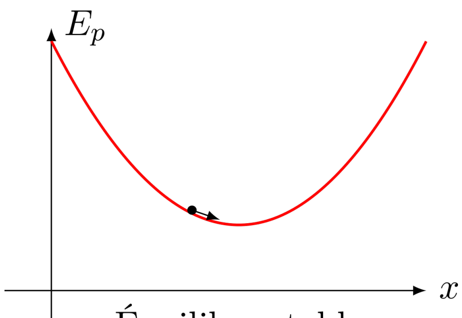
◇ S'il est **instable**, la force doit l'**écarter** de la position d'équilibre (Figure M4.6) :

$$(x - x_{\text{eq}}) > 0 \Rightarrow F > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$$

et si $(x - x_{\text{eq}}) < 0$, alors F doit être < 0, mais la conclusion est la même.

Propriété M4.9 : Stabilité des positions d'équilibre

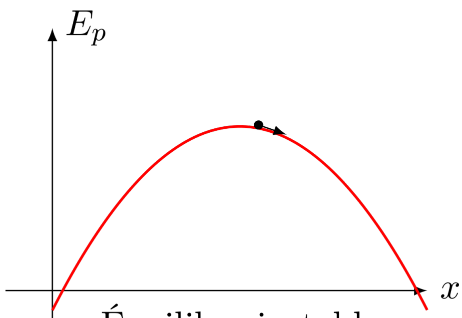
Stable si $\boxed{\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0}$



Équilibre stable

Figure M4.7 – Équilibre stable

Instable si $\boxed{\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0}$

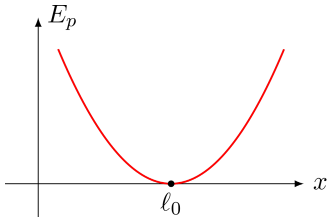


Équilibre instable

Figure M4.8 – Équilibre instable

Application M4.9 : Équilibre d'un ressort

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable ?



L'énergie potentielle d'un ressort est

$$\mathcal{E}_{p,\text{el}} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\mathrm{d}x} = k(x-\ell_0) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\mathrm{d}x^2} = k > 0$$

Ainsi, la position d'équilibre est en $x_{\text{eq}} = \ell_0$, et elle est stable.

V/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

Propriété M4.10 : Mouvement autour d'un équilibre stable

Tout système au voisinage d'un point d'équilibre stable est un oscillateur harmonique.

Démonstration M4.8 : Mouvement autour d'un équilibre stable

En faisant un développement limité de l'énergie potentielle d'un système autour d'une position d'équilibre stable, on a

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) + (x-x_{\text{eq}})\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{x_{\text{eq}}}}_{=0} + \frac{(x-x_{\text{eq}})^2}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}}}_{k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_{\text{eq}})^2$$

Et si l'énergie mécanique se conserve, on a $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$ donc

$$\frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}k2\dot{x}(x-x_{\text{eq}}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}(x-x_{\text{eq}}) = 0}$$

On retrouve **l'équation de l'oscillateur harmonique** ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ avec $k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$.

Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.

Remarque M4.1 : Étude mouvement équilibre instable

Si l'équilibre est instable : $\qquad k = -\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$

d'où par le même raisonnement, $\qquad \ddot{x} - \dfrac{k}{m}(x-x_{\text{eq}}) = 0$

de solution $\qquad x - x_{\text{eq}} = Ae^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t}$

Si $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$: $\qquad x - x_{\text{eq}} = x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile **s'écarte exponentiellement** de cette position.

VI Énergie potentielle et trajectoire

VI/A Détermination qualitative d'une trajectoire

Démonstration M4.9 : Trajectoire et énergie potentielle

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle. En effet,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p \quad \text{car} \quad \mathcal{E}_c > 0$$

Important M4.2 : Trajectoire et énergie potentielle

Dans un diagramme d'énergie potentielle selon x :

- ◇ Seules les régions où $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$ sont accessibles ;
- ◇ Lorsque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_c = 0$ donc la vitesse est nulle ;
- ◇ Lorsque $\mathcal{E}_p$ est minimale, $\mathcal{E}_c$ est maximale donc la vitesse est maximale.

État lié

La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.

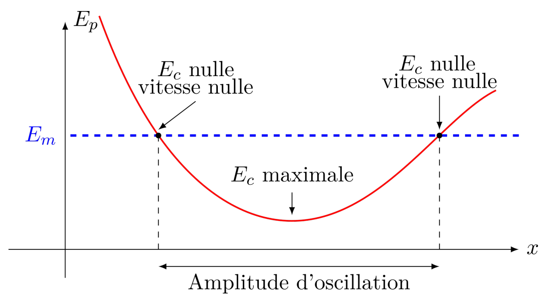


Figure M4.9 – État lié

État de diffusion

La particule aura tendance à partir vers $x = +\infty$ sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.

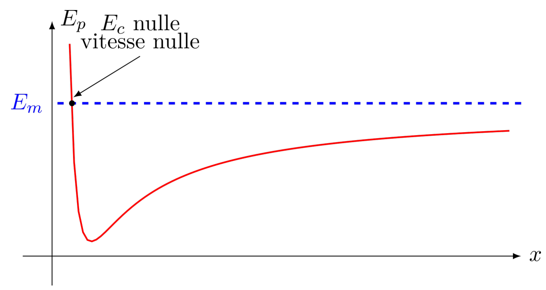


Figure M4.10 – État de diffusion

Une animation est disponible en ligne.

VI/B Cas du pendule simple

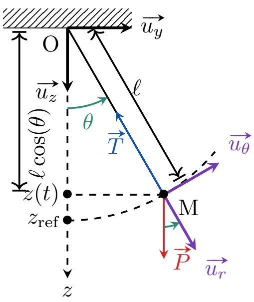
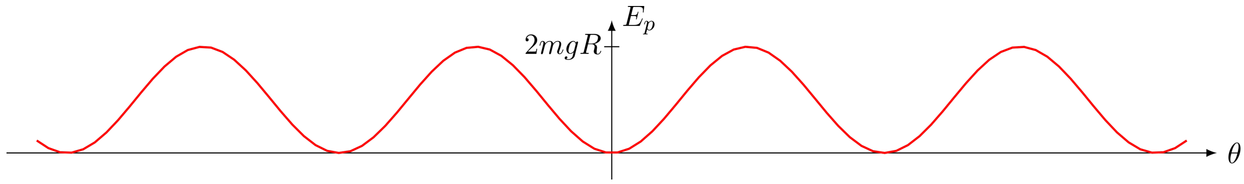


Figure M4.11 – Pendule

On reprend le pendule simple, que l'on suppose attaché avec une tige **rigide** (pour éviter les décrochages). On souhaiterait déterminer ses positions d'équilibre et étudier ses trajectoires possibles. Le système étant conservatif ($\vec{P}$ conservatif et $\vec{T} \perp \vec{v}$), on a

L'altitude est : $\quad z(\theta) = \ell(1 - \cos\theta)$

donc $\mathcal{E}_p$: $\quad \boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = mgz(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)}$



Les positions d'équilibre stables sont donc celles dans les « creux », soit $\theta = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et les instables sur les « collines », soit $\theta = (2p+1)\pi$. On distingue alors deux cas :

◇ Cas $\mathcal{E}_m < 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est inférieure à l'énergie potentielle maximale, on se situera dans un état lié, « coincé » dans un creux. On observera donc une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche, et on a vu que cette oscillation état sinusoïdale aux très petits angles ($|\theta| < 20°$).

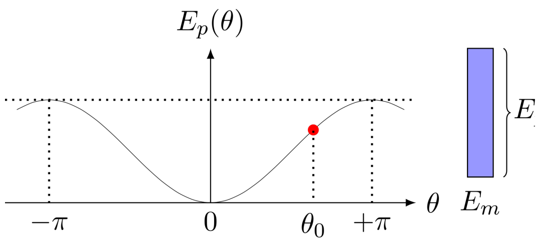


FIGURE M4.12 – État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, et l'énergie est nulle.

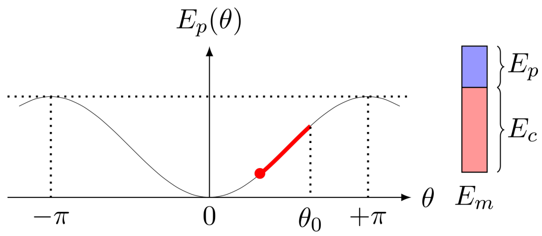


FIGURE M4.13 – La masse perd de l'énergie potentielle tout en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.

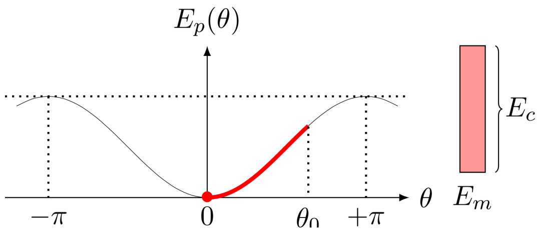


FIGURE M4.14 – La masse a perdu toute son énergie potentielle : son énergie cinétique et donc sa vitesse sont maximales.

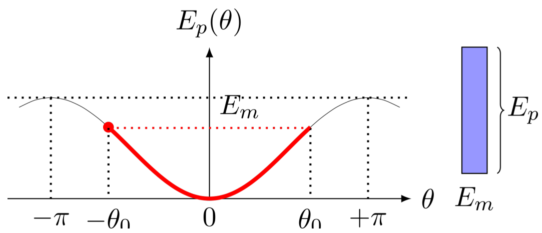


FIGURE M4.15 – La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximale $-\theta_0$, et repart dans l'autre sens.

◇ Cas $\mathcal{E}_m > 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est supérieure à l'énergie potentielle maximale, ça veut dire qu'il y a un excédent d'énergie cinétique. Ainsi, le pendule tourne autour de l'axe de rotation, et lorsqu'il arrive en $\theta = \pi$ l'énergie potentielle est maximale mais l'énergie cinétique n'est pas nulle : il continue sa rotation, sans oscillation. La vitesse n'est cependant pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas du mouvement (par conservation de l'énergie mécanique).

Une animation est disponible en ligne[2].

2. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php