Correction du TD d'application

I Intérêt des raisonnements énergétiques

1) À $t = 0$, la balle est lancée en $z = 0$ avec une vitesse $\vec{v_0} = v_O\,\vec{u_z}$. Elle va monter en altitude en perdant de l'énergie cinétique et en gagnant en énergie potentielle.

Le système {masse} n'est soumis qu'au poids, qui est conservatif ; le système est donc conservatif et l'énergie mécanique se conserve :

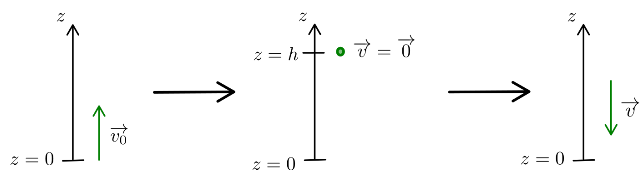

Figure 4.1 – Schéma de la situation

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_m(t_{\max})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}v(t_{\max})^2 + \cancel{m}gh$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = \sqrt{\frac{{v_0}^2}{2g}}}$$

■

2) Le système est conservatif puisque le poids est une force conservative et que le travail de la force de tension est nul ($\vec{T} \perp \vec{v}$). On peut donc utiliser le TEM en déterminant l'énergie potentielle en fonction de θ.

On prend la référence d'altitude $z = 0$ en bas du pendule. La longueur du pendule étant ℓ, on trouve l'altitude en projetant le point M sur l'axe z pour trouver

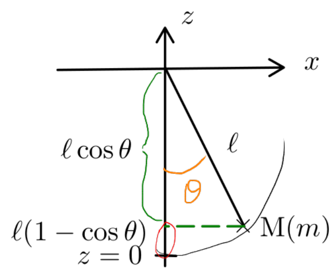

Figure 4.2 – Schéma pour $z(\theta)$

$$z(\theta) = \ell(1 - \cos\theta)$$

Ainsi,

$$\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\max}}^2 + \cancel{m}gz_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \ell(1 - \cos\theta_{\max}) = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}}$$

■

Cette équation est valable si ${v_0}^2/2g\ell < 2$, sinon $\cos\theta_{\max} < -1$. Cette condition traduit le fait que le pendule ne fait pas des tours, i.e. ne dépasse pas $\theta = \pi$.

II Curling

1) On a simplement

$$\mathcal{E}_{c,I} = \frac{1}{2} m {v_0}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{c,F} = 0$$

2) ◇ **Système :** {pierre}

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{piste}}$, galiléen

◇ **Repère :** $(\text{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$

◇ **Repérage :**

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{\text{OM}_0} = D\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

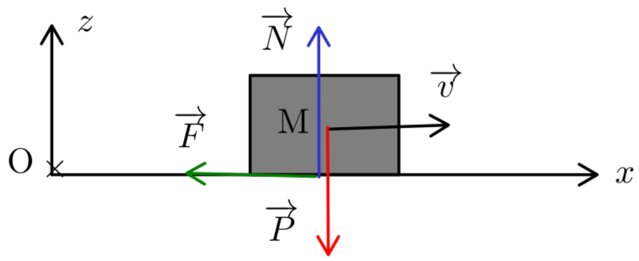

Figure 4.3 – Schéma de la situation

◇ **BDF et BDW :**

$$\begin{array}{lll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Réaction} & \overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Frottements} & \overrightarrow{F} = -F_0\,\overrightarrow{u_x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} W_{\text{OM}_0}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\text{OM}_0} = -mgD(\underbrace{\overrightarrow{u_z} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=0}) = 0 \\ W_{\text{OM}_0}(\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\text{OM}_0} = ND(\underbrace{\overrightarrow{u_z} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=0}) = 0 \\ W_{\text{OM}_0}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\text{OM}_0} = -F_0D(\underbrace{\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=1}) = -F_0D \end{array}$$

3) Ici,

$$\Delta_{\text{OM}_0}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{\text{OM}_0}(\overrightarrow{F}_i)$$
$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m {v_0}^2 = -F_0 D$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2F_0D}{m}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_0 = 3{,}0\,\text{N} \\ D = 25\,\text{m} \\ m = 20\,\text{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{v_0 = 2{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

■

III Piégeage d'un électron

1)

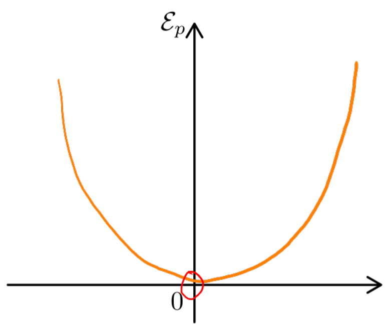

Figure 4.4 – $\mathcal{E}_p(z)$

On trace l'énergie potentielle, qui est **évidemment** une parabole convexe. On trouve le point d'équilibre en calculant sa dérivée et en trouvant quand elle s'annule ; visuellement, la dérivée s'annule en $z_{\text{eq}} = 0$, mathématiquement

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}\right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2} z_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_{\text{eq}} = 0}$$

On trouve sa stabilité en évaluant sa dérivée seconde en ce point, et il sera stable si elle est positive. En tant que fonction convexe en ce point, il est visiblement stable. On calcule :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2} > 0}$$

Il est donc bien stable.

2) Tout système conservatif autour de son point d'équilibre stable est régit par une équation d'oscillateur harmonique, faisant donc apparaître la pulsation propre ω_0. Il suffit pour démontrer cela d'utiliser la caractéristique principale d'un système conservatif : le fait que son énergie mécanique se conserve, i.e. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$. En effet, le TPC nous indique

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\mathrm{NC},i})}_{=0 \text{ car conservatif}} = 0$$

On nous donne $\mathcal{E}_p(z)$, donc pour avoir $\mathcal{E}_m$ il faut trouver la vitesse de la particule. Rien n'est indiqué dans l'énoncé, mais le problème n'indique qu'un potentiel selon $\overrightarrow{u_z}$; on peut supposer que la vitesse ne se fait que selon $\overrightarrow{u_z}$ également, et qu'on a donc $\overrightarrow{v} = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{eV_0}{2d^2}z^2\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} + \frac{eV_0}{d^2}z\cancel{\dot{z}} &= 0 \\
\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = 0} \quad &\text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\omega_0 = 2\pi f_0$, on obtient finalement

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V} \\ m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ d = 6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{f_0 = 25\,\mathrm{MHz}}$ ■

3) Une force conservative dérive d'une énergie potentielle selon

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{F} &= -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{eV_0}{d^2}z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{eV_0}{d^2}z\,\overrightarrow{u_z}}
\end{aligned}$$

■

IV Balle dans un tonneau

1) ◇ **Système :** {balle}

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$, supposé galiléen

◇ **Repère :** cartésien pour la chute sur la rampe, avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, et (C, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$) quand la balle est dans le tonneau ; voir schéma

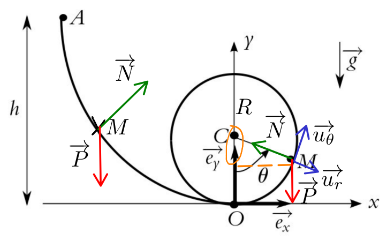

FIGURE 4.5 – Schéma de la situation

◇ **Repérage :** dans le tonneau,

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = R\,\overrightarrow{u_r}$$
$$\vec{v}_{\mathrm{M}} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\vec{a}_{\mathrm{M}} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

◇ **BDF :** dans le tonneau,

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \vec{P} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) \\ \textbf{Réaction} & \vec{N} = -N\,\overrightarrow{u_r} \end{array}$$

◇ **BDW :**

$$W_{\mathrm{AM}}(\vec{N}) = 0 \quad (\vec{N} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}})$$
$$\vec{P} = \text{conservatif}$$

Le système est donc **conservatif**. On peut appliquer le TEM :

◇ **En A :** $v_{\mathrm{A}} = 0$, $z_{\mathrm{A}} = h$

◇ **En O :** $v_{\mathrm{O}} = v_{\mathrm{O}}$, $\boxed{z_{\mathrm{O}} = 0}$ ⇐ référence **pour toute l'étude**

◇ **En M :** $z(\theta) = R(1-\cos\theta)$

◇ **TEM :**

$$\begin{aligned} &\Delta_{\mathrm{AO}}\mathcal{E}_m = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\mathrm{O}}}^2 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{v_{\mathrm{O}} = \sqrt{2gh}} \end{aligned}$$ ■

Puis

$$\begin{aligned} &\Delta_{\mathrm{OM}}\mathcal{E}_m = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\mathrm{M}}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{M})} + \overbrace{\cancel{m}gR(1-\cos\theta)}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{M})} = \overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\mathrm{O}}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{O})} + \overbrace{\underbrace{mgz_{\mathrm{O}}}_{=0}}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{O})} \\ \Leftrightarrow\ &v_{\mathrm{M}} = \sqrt{{v_{\mathrm{O}}}^2 + 2gR(\cos\theta - 1)} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{v_{\mathrm{M}} = \sqrt{2g}\sqrt{h + R(\cos\theta - 1)}} = R\dot{\theta} \end{aligned}$$ ■

2) On sort de l'analyse énergétique, puisqu'on veut une valeur de force **en un point** du mouvement. On applique donc le **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \\ mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

Or, $v_{\mathrm{M}} = R\dot{\theta} \Leftrightarrow {v_{\mathrm{M}}}^2 = R^2\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow R\dot{\theta}^2 = {v_{\mathrm{M}}}^2/R$ donc

$$
\begin{aligned}
N &= m\left(g\cos\theta + \frac{2g}{R}\left(h + R(\cos\theta - 1)\right)\right)\\
\Leftrightarrow N &= m\left(g\cos\theta + 2g\cos\theta - 2g + 2g\frac{h}{R}\right)\\
\Leftrightarrow & \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2 + 2\frac{h}{R}\right)}
\end{aligned}
$$

■

3) La condition de contact entre deux solides est que la réaction normale ne soit pas nulle. Autrement dit, si la réaction normale est nulle, il n'y a plus contact : on cherche donc ici à voir si $N > 0$ à chaque instant. On pourrait tracer la fonction $N(\theta)$, mais on remarque facilement que l'endroit où N est la plus susceptible de s'annuler est quand $\theta = \pi$, quand la belle est « la tête à l'envers ». On résout donc

$$
\begin{aligned}
N(\pi) &> 0\\
\Leftrightarrow \cancel{mg}\left(-3 - 2 + 2\frac{g}{R}\right) &> 0\\
\Leftrightarrow 2\frac{h}{R} &> 5\\
\Leftrightarrow \boxed{h > \frac{5}{2}R} &= h_{\min}
\end{aligned}
$$

■