

# Correction du TD d'entraînement

## I Chute sur corde en escalade

1) Pendant la chute libre, la grimpeuse ne subit que l'action du poids, qui est conservatif. On peut donc utiliser le TEM, avec :

◇ **Au début de la chute libre** :  $z = h, v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$  et  $\mathcal{E}_c = 0$

◇ **À la fin de la chute libre** :  $z = 0, v = v \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = 0$  et  $\mathcal{E}_c = mv^2/2$ .

D'où

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ h = 5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2) On peut utiliser le TEM entre le point tout en haut et le point le plus bas, ou entre le point O et le point le plus bas. Faisons le premier cas :

◇ **Au début de la chute libre** :  $z = h, v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$  et  $\mathcal{E}_c = 0$

◇ **À la fin de la chute amortie** :  $z = -\Delta l, v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = -mg\Delta l, \mathcal{E}_{p,el} = k\Delta l^2/2$  et  $\mathcal{E}_c = 0$ .

Ainsi,

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l) \Leftrightarrow mg\left(h + \frac{\Delta l}{\ll h}\right) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Leftrightarrow \boxed{\Delta l = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}} \quad \blacksquare$$

La solution trouvée est plausible : homogène, augmente avec  $m$ ,  $h$  et  $g$  mais diminue avec  $k$ .

3) En norme, une force de rappel s'exprime  $F = k(\ell - \ell_0)$ , soit ici

$$F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mghk} = \sqrt{2mgh\frac{\alpha}{L_0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha f}} \quad \blacksquare$$

4) On fait l'application numérique :

$$\text{avec} \quad \begin{cases} m = 50 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ \alpha = 5,0 \times 10^4 \text{ N} \\ f = 1 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{F_{\max} = 10 \text{ kN}}$$

Il n'y a donc pas de risque aggravé pour la grimpeuse avec cette chute.

5) Dans le premier cas,  $f_1 = 2$ ; dans le second,  $f_2 = 0,5$ . Or,  $F_{\max}$  évolue en  $\sqrt{f}$ , donc plus  $f$  augmente plus la force subie augmente : le premier cas est donc 2 fois plus dangereux que le premier !

## II Recul d'un canon

1) Au repos, la tension du ressort est nulle, donc  $\ell = L_0$ .

2)  $\diamond$  **Système** : {canon}, repéré par G de masse  $M$

$\diamond$  **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ , supposé galiléen

$\diamond$  **Repère** : mouvement horizontal donc cartésien,  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_z$  vertical ascendant

$\diamond$  **Repérage** :

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= x \vec{u}_x \\ \vec{v} &= \dot{x} \vec{u}_x \\ \vec{a} &= \ddot{x} \vec{u}_x\end{aligned}$$

$\diamond$  **BDF** :

$$\text{Poids} \quad \vec{P} = -mg \vec{u}_z$$

$$\text{Réaction} \quad \vec{N} = N \vec{u}_z$$

$$\text{Ressort} \quad \vec{F} = -k_1(x - L_0) \vec{u}_x$$

Le poids et la tension du ressort sont conservatives, et la réaction du sol ne travaille pas : on a donc un système conservatif, et on applique simplement le TEM :

$\diamond$  **Au moment du tir** :  $v = v_c$ ,  $x = L_0 \Rightarrow \mathcal{E}_{c,0} = Mv_c^2/2$  et  $\mathcal{E}_{p,el} = k_1(L_0 - L_0)^2/2 = 0$

$\diamond$  **Après le recul** :  $v = 0$ ,  $x = L_0 - d \Rightarrow \mathcal{E}_{c,f} = 0$  et  $\mathcal{E}_{p,el} = k_1 d^2/2$

$\diamond$  **TEM** :

$$\frac{1}{2} k_1 d^2 = \frac{1}{2} M \underbrace{v_c^2}_{=mv_0/M}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{m^2}{k_1 M} v_0^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{m}{\sqrt{k_1 M}} v_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k_1 = \frac{m^2 v_0^2}{d^2 M}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2,0 \text{ kg} \\ M = 800 \text{ kg} \\ v_0 = 600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ d = 1,0 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{k_1 = 1800 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}$$

3) Avec le **PFD** et en projetant sur  $\vec{u}_x$  (on a  $N = mg$  sur  $\vec{u}_z$ ) :

$$M\ddot{x} = -k_1(x - L_0)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 L_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + L_0$$

Or,

$$x(t=0) = L_0 \Rightarrow A \cos \varphi = 0$$

On choisit  $\varphi = -\pi/2$ , et ainsi

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + L_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Or,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t=0) &= -\frac{m}{M}v_0 \\ \Rightarrow A &= -\frac{m}{M}\frac{v_0}{\omega_0}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{mv_0}{\sqrt{k_1 M}} \sin(\omega_0 t) + L_0 \quad \blacksquare$$

On obtient alors  $d$  comme étant l'amplitude du sinus, c'est-à-dire le résultat précédent.

- 4) On vient donc de démontrer qu'avec un seul ressort, le canon va osciller et donc après le recul, il va repartir vers l'avant. L'amplitude va diminuer petit à petit à cause des frottements inéluctables, mais le temps avant immobilisation sera important : on a donc intérêt à ajouter une force de frottements visqueux.
- 5) Le système n'est plus conservatif, et la variation d'énergie mécanique est maintenant égale à l'énergie absorbée par le dispositif de freinage, c'est-à-dire

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,f} - \mathcal{E}_{m,i} = -\mathcal{E}_a$$

puisque l'énergie cinétique doit décroître et que  $\mathcal{E}_a$  est positive. Or, initialement et finalement,

$$\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Mv_c^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,f} = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k_2 d^2$$

Soit

$$\frac{1}{2}k_2 d^2 - \frac{1}{2}Mv_c^2 = -\mathcal{E}_a$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{d^2} (Mv_c^2 - 2\mathcal{E}_a)$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{d^2} \left( \frac{m^2}{M} v_0^2 - 2\mathcal{E}_a \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2,0 \text{ kg} \\ M = 800 \text{ kg} \\ v_0 = 600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \mathcal{E}_a = 778 \text{ J} \end{cases} \quad \blacksquare$$

$$\text{A.N. : } k_2 = 244 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$\text{De plus, } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{M}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_2 = 244 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\ M = 800 \text{ kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \omega_0 = 0,55 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

- 6) On reprend la question 3) mais avec la force de frottements, pour obtenir l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 L_0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée est

$$\Delta = \left( \frac{\lambda}{M} \right)^2 - 4\omega_0^2$$

et on a un régime critique quand ce discriminant est nul ; soit

$$\lambda = 2M\omega_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = 800 \text{ kg} \\ \omega_0 = 0,55 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \quad \blacksquare$$

$$\text{A.N. : } \lambda = 884 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

7) Avec le régime critique, on a

$$x(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0$$

Or,

$$x(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A \exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)$$

Or,

$$\dot{x}(0) = v_c \Rightarrow \boxed{A = v_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = -\frac{m}{M} \exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)}$$

$$\text{et } \boxed{x(t) = -\frac{m}{M} v_0 t \exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0}$$

Le recul est maximal quand la vitesse s'annule, soit

$$t_m = \frac{2M}{\lambda} = 1,8 \text{ s}$$

On calcule  $x(t_m)$ , sachant qu'on a par définition  $x(t_m) = L_0 - d$  :

$$x(t_m) = -\frac{m}{M} v_0 \frac{2M}{\lambda} e^{-1} + L_0$$

$$\Leftrightarrow L_0 - d = L_0 - \frac{2mv_0}{\lambda e}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{2mv_0}{\lambda e}}$$

et l'application numérique donne

$$\boxed{d = 1,0 \text{ m}}$$

On retrouve bien la distance de recul précédente, mais cette fois il n'y a pas d'oscillation ! Cahier des charges rempli.

### III Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

1)

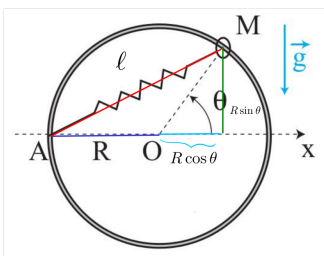


FIGURE 4.1 –  
Détermination de  $\ell$

On peut réutiliser la relation de CHASLES pour écrire  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$  et déterminer la distance en prenant la norme, mais ici une simple utilisation du théorème de PYTHAGORE suffit. On projette M sur l'axe  $x$  pour avoir

$$\ell^2 = (R + R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = R^2 + 2R^2 \cos \theta + R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 2R^2(1 + \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{2(1 + \cos \theta)}}$$

- 2) L'énergie potentielle totale  $\mathcal{E}_p$  est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur de l'anneau et de l'énergie potentielle élastique du ressort. Pour  $\mathcal{E}_{p,p}$  avec origine en O, on a une altitude  $R \sin \theta$ ; pour  $\mathcal{E}_{p,el}$  on a la différence de longueur à vide  $\ell - \ell_0$  avec  $\ell_0 = 0$ , d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_p &= mgR \sin \theta + \frac{k}{2} \ell^2 \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p = mgR \sin \theta + kR^2(1 + \cos \theta)}\end{aligned}$$

- 3) On trouve les positions d'équilibre de l'anneau en trouvant les angles  $\theta_{eq}$  tels que la dérivée de  $\mathcal{E}_p$  s'annule, soit

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} &= -kR^2 \sin \theta_{eq} + mgR \cos \theta_{eq} = 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta_{eq} &= \frac{mgR}{kR^2} \cos \theta_{eq} \\ \Leftrightarrow \tan \theta_{eq} &= \frac{mg}{kR} \\ \Leftrightarrow \boxed{\theta_{eq,1} = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_{eq,2} = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)}\end{aligned}$$

avec  $\theta_{eq,1}$  compris entre 0 et 90°, et  $\theta_{eq,2}$  compris entre 180 et 270°.

- 4) On étudie la stabilité des positions en évaluant la dérivée seconde de  $\mathcal{E}_p$  en ce point et en vérifiant son signe. On obtient

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}} &= -kR^2 \cos \theta_{eq} - mgR \sin \theta_{eq} \\ \Leftrightarrow \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}} &= -\left(kR^2 + \frac{m^2g^2}{k}\right) \cos \theta_{eq}\end{aligned}$$

en utilisant les résultats précédents sur la dérivée première de  $\mathcal{E}_p$ . L'intérieur de la parenthèse étant positif, le signe de cette dérivée seconde est opposé à celui du cosinus de la position d'équilibre. Or,  $\cos \theta_{eq,1} > 0$  et  $\cos \theta_{eq,2} < 0$ , donc

$$\boxed{\left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq,1}} < 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq,2}} > 0}$$

La première position est donc instable, et la seconde stable.

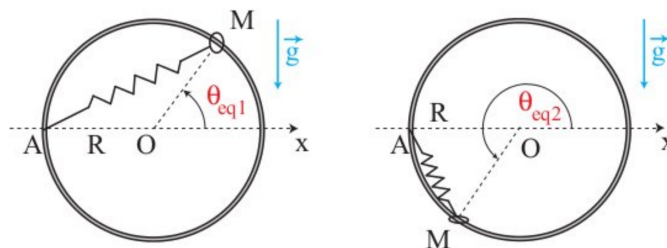


FIGURE 4.2 – Positions d'équilibre du système

## IV Oscillateur de LANDAU

- 1) Comme l'anneau est contraint de se déplacer sur une ligne horizontale, son énergie potentielle de pesanteur est constante. Ainsi, la seule contribution à l'énergie potentielle est d'origine élastique,

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}k(\text{AM} - \ell_0)^2$$

La longueur AM s'exprime à partir du théorème de PYTHAGORE,

$$\text{AM}^2 = a^2 + x^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}k \left( \sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0 \right)^2$$

- 2) Qualitativement, il est assez simple de comprendre pourquoi certaines courbes font apparaître deux minima et d'autre un seul. Si  $a < \ell_0$ , alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que  $\text{AM} = \ell_0$ . Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle. Au contraire, si  $a > \ell_0$ , le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle.



Ce raisonnement se retrouve tout à fait sur l'expression mathématique de  $\mathcal{E}_p$  !

Ainsi on peut identifier la courbe en **pointillés violets** au cas  $\mathbf{a}_4 = 3\ell_0$ . La courbe en **points verts** ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : elle correspond au cas  $\mathbf{a}_3 = \ell_0$ . Enfin, il reste à identifier les deux dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en  $x = 0$ . Elle est plus élevée sur la courbe bleue que sur la courbe rouge, signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que la **courbe bleue** est celle du cas  $\mathbf{a}_1 = \ell_0/10$  alors que la courbe **rouge** correspond à  $\mathbf{a}_2 = \ell_0/3$ .

- 3) Quelles que soient les conditions initiales, le mouvement est borné car  $\mathcal{E}_p$  diverge en  $\pm\infty$ , et il est donc périodique. Dans le cas  $a \leq \ell_0$ , si les conditions initiales sont telles que  $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_p(x = 0)$ , alors le mouvement est restreint à un côté  $x < 0$  ou  $x > 0$  car l'anneau n'a pas assez d'énergie pour franchir la barrière de potentiel en  $x = 0$ . Si les conditions initiales sont en revanche telles que  $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_p(x = 0)$ , le mouvement a lieu de part et d'autre de la barrière, et il est symétrique car le profil d'énergie potentielle l'est. C'est également le cas si  $a > \ell_0$ , et ce quelles que soient les conditions initiales.
- 4) La condition initiale est très simple à déterminer : c'est le seul point commun à toutes les trajectoires de phase. Compte tenu de la symétrie des portraits de phase et des profils d'énergie potentielle, seule la norme de la vitesse peut être déterminée. On trouve

$$x_0 = 0,4\ell_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_0 = 0,5\ell_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Seule la trajectoire de phase représentée en **bleu** n'est pas symétrique par rapport à  $x = 0$ . Elle correspond donc au cas où la barrière de potentiel centrale est la plus élevée, donc le cas  $\mathbf{a}_1 = \ell_0/10$ . La trajectoire de phase représentée en **rouge** montre une réduction de vitesse en  $x = 0$  : elle correspond donc au cas où il y a une barrière de potentiel, mais moins élevée, c'est-à-dire le cas  $\mathbf{a}_2 = \ell_0/3$ . Enfin, la trajectoire de phase **verte** est plus aplatie que la trajectoire de phase violette. Cet aplatissement se retrouve dans les courbes d'énergie potentielle : la courbe verte correspond au cas  $\mathbf{a}_3 = \ell_0$  et la courbe **violette** au cas  $\mathbf{a}_4 = 3\ell_0$ .

## V Pendule électrique

- 1) Pour exprimer la distance AM, on la décompose par des vecteurs connus et on pourra prendre la norme du vecteur  $\overrightarrow{\text{AM}}$  avec  $\sqrt{x_{\text{AM}}^2 + y_{\text{AM}}^2}$ , ou  $\sqrt{\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{AM}}}$ . Notamment,  $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OM}}$ .

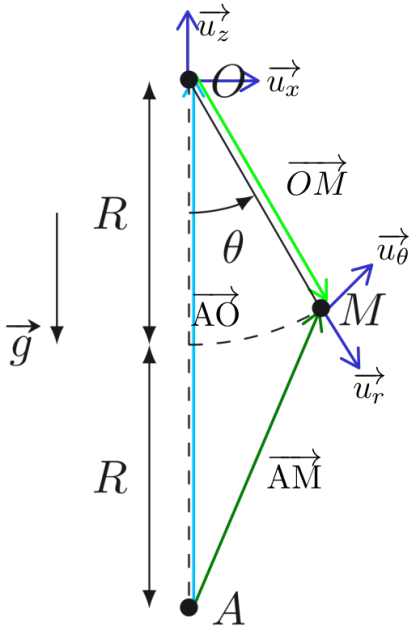


FIGURE 4.3 – Détermination de AM

Il faut donc décomposer  $\vec{AO}$  et  $\vec{OM}$  sur la même base, comme on le fait pour le poids sur un plan incliné. En effet,

$$\begin{aligned}\vec{AO} &= 2R \vec{u}_z \\ \vec{OM} &= R \vec{u}_r\end{aligned}$$

mais on ne peut pas sommer les deux dans des bases différentes. Décomposons  $\vec{u}_r$  sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$  : on trouve

$$\vec{u}_r = \sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_z$$

Ainsi,  $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 2R - R \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{AM}\| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + (2R - R \cos \theta)^2}$$

$$\Leftrightarrow AM = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + 4R^2 - 2R^2 \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow AM = \sqrt{5R^2 - 2R^2 \cos \theta} \quad \text{avec} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{AM = R\sqrt{5 - 2 \cos \theta}}$$

- 2) Une force est conservative si son travail élémentaire s'exprime sous la forme  $-d\mathcal{E}_p$ . Calculons son travail élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot d\vec{AM}$$

$$\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{AM^3} \vec{AM} \cdot d\vec{AM}$$

$$\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{AM^3} \underbrace{\|\vec{AM}\|}_{=AM} \underbrace{\|d\vec{AM}\| \cos(\vec{AM}, d\vec{AM})}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{AM^2} \underbrace{\frac{AM}{AM}}_{=1} dAM$$

$$\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}_e) = -k d\left(\frac{1}{AM}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta W(\vec{F}_e) = -d\mathcal{E}_{p,e}}$$

avec  $\boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \frac{k}{AM} = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}}$

- 3) La boule M a également une énergie potentielle de pesanteur. En prenant O comme origine de l'altitude, l'altitude de la boule M  $z(\theta)$  s'exprime

$$z(\theta) = -R \cos \theta$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_p(\theta) = \mathcal{E}_{p,p}(\theta) + \mathcal{E}_{p,e}(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} - mgR \cos \theta}$$

- 4) On observe en tout 5 positions d'équilibres : deux stables dans les puits de potentiel vers  $\pm 1$  rad, et trois instables (maxima locaux d'énergie potentielle) en  $-\pi, 0$  et  $\pi$ .

5) Le mouvement du pendule ne se fait que dans les zones du graphique où  $\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_m$ . On distingue donc 4 cas :

- Cas 1**  $0 \text{ J} < \mathcal{E}_m < 3,5 \times 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow$  pas de mouvement  
**Cas 2**  $3,5 \times 10^{-2} \text{ J} < \mathcal{E}_m < 4,4 \times 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow$  oscillations  $\approx$  position stable  
**Cas 3**  $4,4 \times 10^{-2} \text{ J} < \mathcal{E}_m < 5,4 \times 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow$  mouvement périodique entre  $\mathcal{E}_{p,\max}$   
**Cas 4**  $5,4 \times 10^{-2} \text{ J} < \mathcal{E}_m < +\infty \Rightarrow$  mouvement révolatif : tours à l'infini

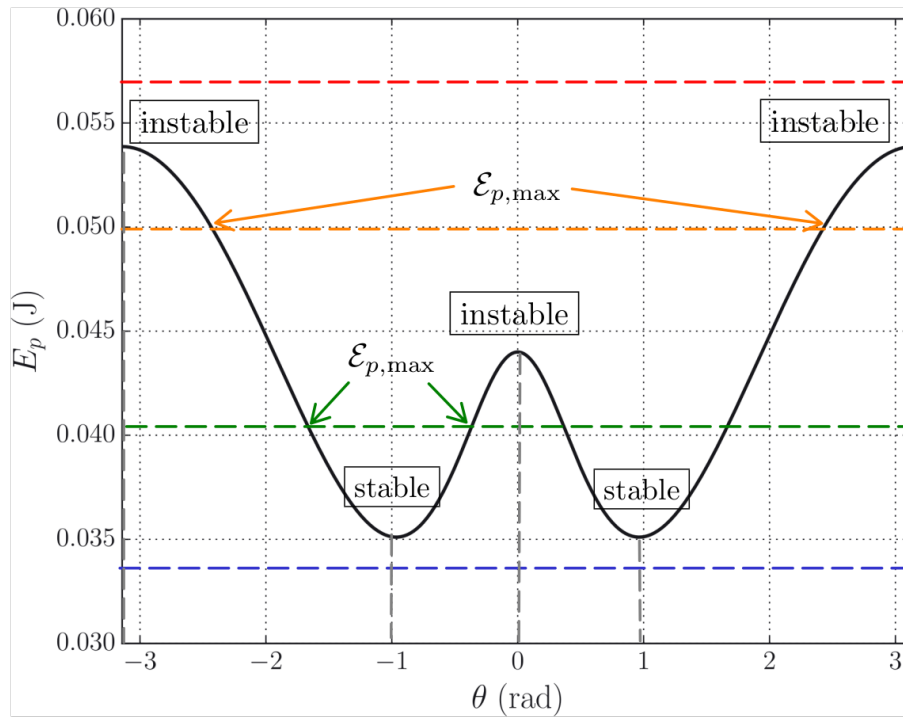


FIGURE 4.4 – Mouvement selon  $\mathcal{E}_m$