

Mouvement de particules chargées

Sommaire

I Introduction	3
I/A Champs électrique et magnétique	3
I/B Produit vectoriel	3
II La force de LORENTZ	5
II/A Généralités	5
II/B Aspects énergétiques	5
III Mouvement dans un champ électrique (stationnaire et uniforme)	7
III/A Situation générale	7
III/B Accélération d'une particule chargée	8
III/C Déviation d'une particule chargée	9
IV Mouvement dans un champ magnétique (stationnaire et uniforme)	10
IV/A Vitesse initiale parallèle au champ \vec{B}	10
IV/B Vitesse initiale perpendiculaire au champ \vec{B}	10
IV/C Applications	13

Capacités exigibles

- Force de LORENTZ exercée sur une charge ponctuelle
- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.

- Mouvement d'une particule chargée dans un champ \vec{E} uniforme :
 - ▷ Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur \vec{a} constant ;
 - ▷ Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ \vec{B} uniforme pour $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$: déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

 ✓ L'essentiel

 ☰ Définitions

<input type="checkbox"/>	M5.1 : Champ électrique	3
<input type="checkbox"/>	M5.2 : Champ magnétique	3
<input type="checkbox"/>	M5.3 : Produit vectoriel	3
<input type="checkbox"/>	M5.4 : Force de LORENTZ	5
<input type="checkbox"/>	M5.5 : Tension	7

 ⚠ Propriétés

<input type="checkbox"/>	M5.1 : Produit vectoriel	4
<input type="checkbox"/>	M5.2 : Poids vs. LORENTZ	5
<input type="checkbox"/>	M5.3 : Puissance de LORENTZ	5
<input type="checkbox"/>	M5.4 : Énergie potentielle électrique	6
<input type="checkbox"/>	M5.5 : Potentiel électrostatique	6
<input type="checkbox"/>	M5.6 : Tension et champ électrique	7
<input type="checkbox"/>	M5.7 : Mouvement général en champ \vec{E}	7
<input type="checkbox"/>	M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$	8
<input type="checkbox"/>	M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$	9
<input type="checkbox"/>	M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$	10
<input type="checkbox"/>	M5.11 : Trajectoire particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$	10
<input type="checkbox"/>	M5.12 : Mouvement particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$	11

 ☰ Démonstrations

<input type="checkbox"/>	M5.1 : Produit vectoriel	4
<input type="checkbox"/>	M5.2 : Poids vs. LORENTZ	5
<input type="checkbox"/>	M5.3 : Puissance de LORENTZ	6
<input type="checkbox"/>	M5.4 : Énergie potentielle électrique	6
<input type="checkbox"/>	M5.5 : Potentiel électrostatique	6
<input type="checkbox"/>	M5.6 : Tension et champ électrique	7
<input type="checkbox"/>	M5.7 : Mouvement général en champ \vec{E}	8
<input type="checkbox"/>	M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$	8
<input type="checkbox"/>	M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$	9
<input type="checkbox"/>	M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$	10
<input type="checkbox"/>	M5.11 : Trajectoire $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ par FRENET	10
<input type="checkbox"/>	M5.12 : Mouvement particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$	11

 📌 Remarques

<input type="checkbox"/>	M5.1 : Comparaison \vec{E} et \vec{g}	7
<input type="checkbox"/>	M5.2 : Accélération rectiligne	9
<input type="checkbox"/>	M5.3 : Cas général \vec{v}_0 dans \vec{B}	13

 📄 Exemples

<input type="checkbox"/>	M5.1 : Produit vectoriel	4
<input type="checkbox"/>	M5.2 : Oscilloscope analogique.	10

I Introduction

I/A Champs électrique et magnétique

I/A) 1 Champ électrique

Définition M5.1 : Champ électrique

Un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ est un champ de vecteurs créé par des charges électriques et par des variations temporelles du champ magnétique.

Unités

$$\|\vec{E}(M,t)\| \text{ en } \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Ordre de grandeur M5.1 : Champs électriques

- ◇ À l'intérieur d'un condensateur en TP, on a environ $10 \text{ V}\cdot\text{mm}^{-1}$, soit $10 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$
- ◇ À la surface de la Terre, le champ électrique est d'environ $10^2 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$
- ◇ Le champ électrique créé lors d'un orage est d'environ $10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$
- ◇ Le champ électrique pour la téléphonie mobile est d'environ $50 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

I/A) 2 Champ magnétique

Définition M5.2 : Champ magnétique

Un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ est un champ de vecteurs créé par des courants électriques et par des variations temporelles du champ électrique.

Unités

$$\|\vec{B}(M,t)\| \text{ en } \text{Tesla (T)}$$

Ordre de grandeur M5.2 : Champs magnétiques

- ◇ À l'intérieur d'une bobine en TP, on a environ 10^{-4} T
- ◇ À la surface de la Terre, le champ magnétique est d'environ $5 \times 10^{-5} \text{ T}$
- ◇ Le champ magnétique au centre d'un IRM est d'environ 1 T
- ◇ Le champ magnétique d'un aimant permanent est d'environ $[10^{-2} ; 10^{-1}] \text{ T}$

Important M5.1 : Condition du chapitre

On considèrera dans toute la suite des champs **uniformes** (constants dans l'espace) et **stationnaires** (constants dans le temps).

I/B Produit vectoriel

L'étude des mouvements de particules chargées va faire intervenir un produit vectoriel.

♥ Définition M5.3 : Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel \vec{c} de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} s'écrit $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est un **vecteur** :

- ◇ **perpendiculaire au plan** (\vec{a}, \vec{b}) , donc à \vec{a} et à \vec{b} : $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b}$
- ◇ de sens donné par la règle de la **main droite** ;
- ◇ de norme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin(\theta)|$ avec $\theta = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

Antisymétrie

C'est un opérateur **antisymétrique**, c'est-à-dire qu'il respecte

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Aire

L'aire \mathcal{A} du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} est donnée par :

$$\mathcal{A} = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

♥ **Exemple M5.1 : Produit vectoriel**

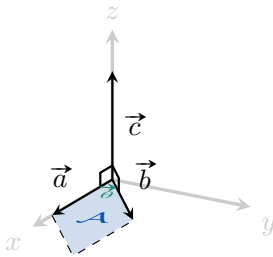


FIGURE M5.1

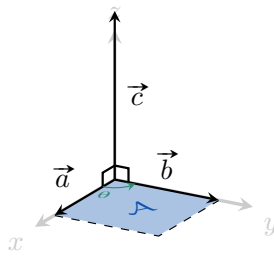


FIGURE M5.2

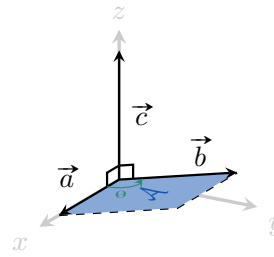


FIGURE M5.3

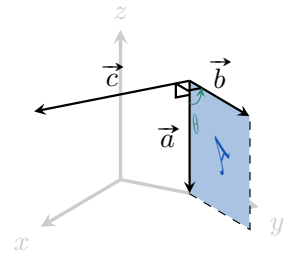
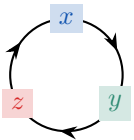


FIGURE M5.4

♥ **Propriété M5.1 : Produit vectoriel**

Pour toute base orthonormée **directe** (BOND), le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne le troisième avec un signe + s'ils se suivent dans une permutation circulaire ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ ou $r \rightarrow \theta \rightarrow z \rightarrow r$), et un signe - sinon :



$$\begin{aligned} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y &= \vec{u}_z & \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z &= \vec{u}_x & \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x &= \vec{u}_y \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x &= -\vec{u}_z & \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y &= -\vec{u}_x & \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z &= -\vec{u}_y \end{aligned}$$

Ces données permettent de calculer n'importe quel produit vectoriel exprimé dans une BOND :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

♥ **Démonstration M5.1 : Produit vectoriel**

Le résultat quelconque n'est pas à connaître, et doit toujours se redémontrer :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \wedge (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} &= \underbrace{a_x \vec{u}_x \wedge (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)}_{= \vec{0}} + \underbrace{a_y \vec{u}_y \wedge (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)}_{= -\vec{u}_z} + \underbrace{a_z \vec{u}_z \wedge (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)}_{= \vec{0}} \\ &+ \underbrace{a_x \vec{u}_x \wedge b_y \vec{u}_y}_{= \vec{u}_z} + \underbrace{a_x \vec{u}_x \wedge b_z \vec{u}_z}_{= \vec{0}} + \underbrace{a_y \vec{u}_y \wedge b_x \vec{u}_x}_{= -\vec{u}_z} + \underbrace{a_y \vec{u}_y \wedge b_z \vec{u}_z}_{= \vec{0}} + \underbrace{a_z \vec{u}_z \wedge b_x \vec{u}_x}_{= \vec{u}_y} + \underbrace{a_z \vec{u}_z \wedge b_y \vec{u}_y}_{= -\vec{u}_x} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II La force de LORENTZ

II/A Généralités

II/A)1 Définition

♥ Définition M5.4 : Force de LORENTZ

La force subie par une charge q plongée dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} est appelée **force de LORENTZ**, telle que

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad \text{avec} \quad \vec{F}_e = q\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{F}_m = q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B})}$$

On appelle \vec{F}_e la **force électrique** et \vec{F}_m la **force magnétique**.

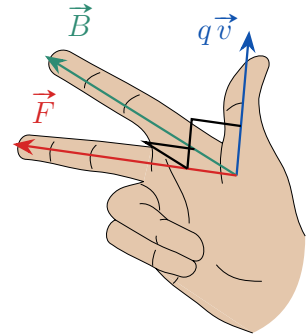


FIGURE M5.5 – Règle de la main droite

II/A)2 Comparaison au poids

♥ Propriété M5.2 : Poids vs. LORENTZ

Dans les problèmes incluant des particules chargées, on négligera toujours le poids devant la force de LORENTZ.

Démonstration M5.2 : Poids vs. LORENTZ

Pour un proton dans des conditions standard de laboratoire :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \|\vec{v}\| \approx 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \|\vec{E}\| \approx 10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1} \\ \|\vec{B}\| \approx 10^{-3} \text{ T} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{P}\| \approx 2 \times 10^{-26} \text{ N} \\ \|\vec{F}_e\| \approx 2 \times 10^{-16} \text{ N} \\ \|\vec{F}_m\| \approx 2 \times 10^{-16} \text{ N} \end{array} \right. \Rightarrow \|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\| \quad \blacksquare$$

II/B Aspects énergétiques

II/B)1 Puissance de la force de LORENTZ

♥ Propriété M5.3 : Puissance de LORENTZ

La force magnétique a une puissance nulle, donc on a

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}_e) = q\vec{E} \cdot \vec{v}(t)$$

Ainsi, un champ magnétique ne peut pas accélérer ou ralentir une particule chargée mais ne peut que la dévier.

♥ Démonstration M5.3 : Puissance de LORENTZ

La puissance de la force de LORENTZ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{F}) &= \left(q \left(\vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B} \right) \right) \cdot \vec{v}(t) \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) &= q\vec{E} \cdot \vec{v}(t) + q \overbrace{\left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}}^{\substack{=0 \\ \perp \vec{v}}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) &= \mathcal{P}(\vec{F}_e) \stackrel{\text{TPC}}{=} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

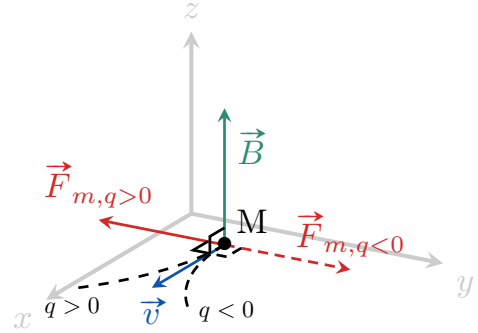


FIGURE M5.6

Ainsi, seule la **force électrique** peut faire varier l'énergie cinétique, et donc la vitesse, d'une particule chargée; la force magnétique peut changer sa **direction** mais pas sa norme.

II/B) 2 Énergie potentielle

♥ Propriété M5.4 : Énergie potentielle électrique

La force de LORENTZ électrique est **conservative**, donc dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,e}$:

$$\vec{E} = \pm E\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \mp qEz + \text{cte}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_e = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,e}$$

Démonstration M5.4 : Énergie potentielle électrique

Le champ magnétique ne travaillant pas, on s'intéresse au travail élémentaire de la force électrique. Supposons un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_z$:

$$\begin{aligned} \delta W_{AB}(\vec{F}) &= \vec{F}_e \cdot d\overrightarrow{OM} \\ \Leftrightarrow \delta W_{AB}(\vec{F}) &= qE\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \delta W_{AB}(\vec{F}) &= qE dz = -d(-qEz) \triangleq -d\mathcal{E}_{p,e} \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e} = -qEz} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II/B) 3 Potentiel électrostatique

♥ Propriété M5.5 : Potentiel électrostatique

Le champ \vec{E} dérive d'une grandeur scalaire, appelée **potentiel électrique** et notée $V(x,y,z)$, telle que :

$$V = \frac{\mathcal{E}_{p,e}}{q} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e} = qV} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Ainsi, \vec{E} est dirigé vers les potentiels décroissants.

♥ Démonstration M5.5 : Potentiel électrostatique

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,e} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\mathcal{E}_{p,e}}{q} \right) \quad \blacksquare$$

On retrouve alors les notions du début d'année en électrocinétique :

♥ Définition M5.5 : Tension

La **tension** entre deux points A et B est la **différence de potentiel** entre ces deux points :

$$U_{AB} = V(A) - V(B)$$

♥ Propriété M5.6 : Tension et champ électrique

En appliquant une tension U entre deux grilles planes parallèles et distantes de d , on obtient un champ électrique **perpendiculaire** aux grilles, dirigé vers les potentiels **décroissants** (de \oplus à \ominus) de norme

$$\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$$

♥ Démonstration M5.6 : Tension et champ électrique

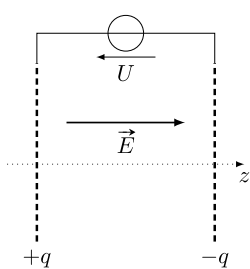


FIGURE M5.7

Dans ce cas, $V(x,y,z)$ ne dépend que de z , par invariance des charges sur x et y (on néglige les effets de bord) ; autrement dit, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = E \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \int_A^B E dz &= -\int_A^B dV \Leftrightarrow E(z_B - z_A) = V(A) - V(B) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot \vec{u}_z \text{ et } \cdot dz \\ \int_A^B \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{U_{AB}}{d} > 0$$

♥ Remarque M5.1 : Comparaison \vec{E} et \vec{g}

La situation avec un champ \vec{E} est en essence tout à fait similaire à celle du poids, provenant d'un champ gravitationnel :

	Poids	Force électrique
Force	$\vec{P} = m \vec{g}$	$\vec{F}_e = q \vec{E}$
Énergie potentielle	$\mathcal{E}_{p,p} = \pm mgz$	$\mathcal{E}_{p,e} = \pm qV$
Sens des champs	\vec{g} altitude \searrow	\vec{E} potentiel \searrow
Sens des forces	Sens de \vec{g} car $m > 0$	Sens dépend de $q \leq 0$

III Mouvement dans un champ électrique (stationnaire et uniforme)

III/A Situation générale

♥ Propriété M5.7 : Mouvement général en champ \vec{E}

Les équations scalaires du mouvement d'une particule de charge q dans un champ électrique \vec{E} sont semblables à celle d'un corps non chargé de masse m dans le champ de pesanteur \vec{g} .

♥ Démonstration M5.7 : Mouvement général en champ \vec{E}

1 **Système** : {particule} de masse m de charge q dans un champ \vec{E} .

2 **Schéma** : ci-contre.

3 **Modélisation** : $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

◇ Repère : cartésien, $\vec{u}_z \perp$ grilles, soit $\vec{E} = E\vec{u}_z$ avec $E = U/d$;

◇ Repérage : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$
 $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$
 $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$

◇ Instant initial : la particule part de $z = 0$, $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$

4 **BDF** :

Poids

\vec{P} négligeable devant \vec{F}

Force électrique

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{u}_z$$

5 **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{F}_e \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{z}(t) = qE \end{cases}$$

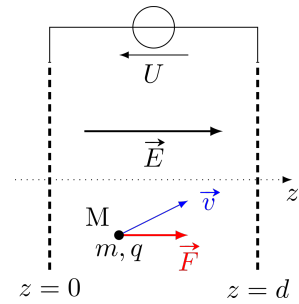


FIGURE M5.8 – Situation générale

III/B Accélération d'une particule chargée

♥ Propriété M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$

Une particule **chargée positivement** et lâchée depuis O en $z = 0$ à la vitesse \vec{v}_0 dans le sens d'un **champ électrique** est **accélérée**, et sa vitesse finale en D à $z = d$ s'exprime :

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_{OD}}{m}} \Leftrightarrow v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta_{DO}\mathcal{E}_{p,e}}{m}}$$

♥ Démonstration M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$

Comme le système est **conservatif** et qu'on s'intéresse à un instant précis du mouvement, il est plus astucieux d'utiliser le **TEM** plutôt que le PFD :

◇ En $z = 0$: $\mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_{p,e}(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0)$

◇ En $z = d$: $\mathcal{E}_m(d) = \mathcal{E}_c(d) + \mathcal{E}_{p,e}(d) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d)$

◇ **TEM** :

$$\Delta_{OD}\mathcal{E}_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d)$$

$$\Leftrightarrow v_f^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}(V(0) - V(d))$$

$$\Leftrightarrow v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_{OD}}{m}} = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{\Delta_{DO}\mathcal{E}_{p,e}}{m}}$$

C'est similaire à une chute sans frottement avec $\vec{v}_0 = \vec{0}$ dans le champ \vec{g} :

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\frac{\Delta_{p,p}\mathcal{E}}{m}}$$

♥ Remarque M5.2 : Accélération rectiligne

◇ En faisant l'application numérique pour un proton de charge $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$, de masse $m = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ partant de $v_0 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et accéléré par $U = 1 \text{ kV}$, on trouve

$$v_f = 4,4 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 440 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

◇ L'électron-volt est une unité d'énergie, telle que

$$1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = e \times 1 \text{ V}$$

C'est l'énergie cinétique que gagne un électron (ou un proton) accéléré par une tension de 1 V. Dans les accélérateurs de particules modernes, on touche au TeV.

◇ Si $U < 0$ ou $q < 0$, on peut ralentir la particule chargée. Elle peut même faire demi-tour si $\Delta\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_c(0)$. Dans le cas du champ \vec{g} , c'est le cas du lancer vertical d'un corps de masse m .

III/C Déviation d'une particule chargée

♥ Propriété M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Une particule chargée positivement et lancée perpendiculairement à un champ électrique est déviée, et son angle final est proportionnel à U .

♥ Démonstration M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Prenons $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ et $\vec{E} = E\vec{u}_z$, avec $E = U/d$. On reprend le résultat obtenu dans la situation générale (III/A) et on intègre :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \text{ ignorée} \\ m\ddot{z}(t) = qE = q\frac{U}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{z}(t) = \frac{qU}{md}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0t \\ z(t) = \frac{qU}{2md}t^2 \end{cases}$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = \frac{qU}{2mdv_0^2}x^2$$

C'est une trajectoire parabolique, en tout point similaire à la chute libre. On peut alors déterminer l'angle de déviation α_f une fois qu'elle a quitté le champ \vec{E} :

$$x(t_f) = L \Leftrightarrow t_f = \frac{L}{v_0} \text{ et } \begin{cases} \dot{x}(t_f) = v(t_f) \cos(\alpha_f) = v_0 \\ \dot{z}(t_f) = v(t_f) \sin(\alpha_f) = \frac{qUL}{mdv_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha_f) = \frac{\dot{z}(t_f)}{\dot{x}(t_f)} \approx \alpha_f \Leftrightarrow \alpha_f = \frac{qUL}{mdv_0^2}$$

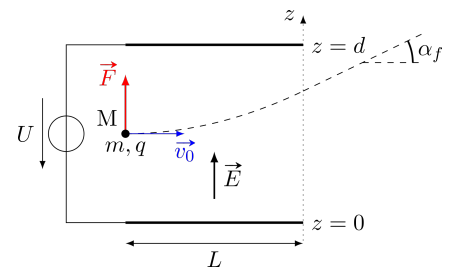


FIGURE M5.9 – Déviation pour $q > 0$

Exemple M5.2 : Oscilloscope analogique.

Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

IV Mouvement dans un champ magnétique (stationnaire et uniforme)

IV/A Vitesse initiale parallèle au champ \vec{B}

Propriété M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$

Une particule chargée de vitesse initiale colinéaire au champ magnétique a un mouvement rectiligne uniforme.

Démonstration M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$

$$\vec{B} \parallel \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{F}_m(0) = q(\vec{v}_0 \wedge \vec{B}) = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{a}(0) = \vec{0}$$

Ainsi, aucune action ne s'exerce sur la particule à $t = 0$, donc elle conserve son vecteur vitesse dt plus tard, et ainsi de suite $\forall t$.¹

IV/B Vitesse initiale perpendiculaire au champ \vec{B}

IV/B) 1 Trajectoire

♥ Propriété M5.11 : Trajectoire particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$

Une particule chargée dans un champ \vec{B} perpendiculaire à sa vitesse initiale \vec{v}_0 décrit un cercle de rayon cyclotron $R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$.

♥ Démonstration M5.11 : Trajectoire $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ par FRENET

- 1 Système : {particule} de masse m de charge q soumis à \vec{F}_m
- 2 Schéma : ci-contre situation initiale.
- 3 Modélisation :

- ◇ Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- ◇ Repère : $(M(t), \vec{u}_T, \vec{u}_N)$
- ◇ Repérage :

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_T$$

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{u}_T + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{u}_N$$

$$\vec{B} = B\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \vec{B} \perp \vec{v}_0$$

$$\text{Or,} \quad \mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = v_0\vec{u}_T$$

$$\text{et} \quad \vec{a}(t) = \frac{v_0^2}{R(t)}\vec{u}_N$$

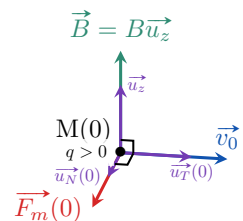


FIGURE M5.10 – Schéma initial.

1. Une démonstration complète demande plus de rigueur et se fait par projection, cf. propriété suivante.

4 **BDF** :
$$\vec{F}_m = q \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{B} \right) = qBv_0 (\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

5 **PFD** :
$$m \vec{a}(t) = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{mv_0}{R(t)} \vec{u}_N = qB (\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

Planéité

$$\vec{u}_N = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \vec{u}_N \wedge \vec{u}_z = 0 \quad \forall t$$

Or, $\vec{u}_T \perp \vec{u}_N$ donc $\vec{u}_T \perp \vec{u}_z \quad \forall t$ ■

Autrement dit, $(\vec{u}_T(0), \vec{u}_N(0))$ donne le plan de la trajectoire $\forall t$: **la trajectoire de M(t) s'effectue dans le plan constant perpendiculaire à \vec{B} !**

Circularité

En reprenant le PFD en norme, on a

$$\frac{mv_0}{R(t)} = |q|B \Leftrightarrow R(t) = R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$
 ■

La trajectoire est donc un **cercle** de rayon constant R_c .

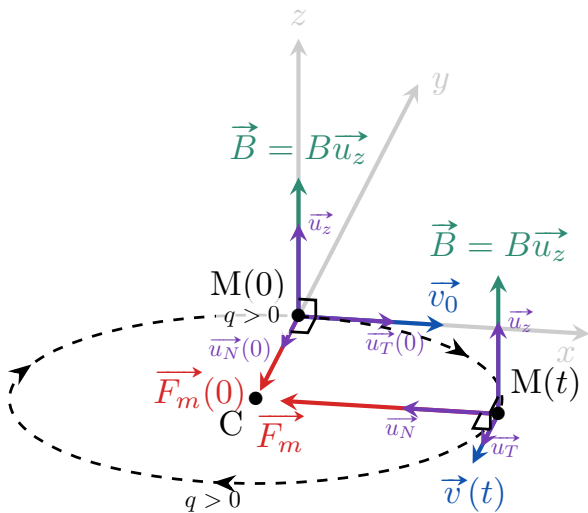


FIGURE M5.11

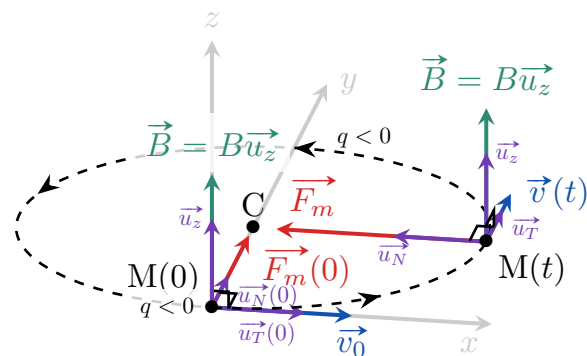


FIGURE M5.12

IV/B) 2 Solution horaire

♥ **Propriété M5.12 : Mouvement particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$**

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B} \perp \vec{v}_0$ est un cercle,

de rayon cyclotron $R_c = \frac{mv_0}{qB}$ parcouru à la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ tel que $R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$

♥ **Démonstration M5.12 : Mouvement particule $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$**

- 1 **Système** : {particule} de masse m de charge q soumis à \vec{F}_m
- 2 **Schéma** : ci-contre situation initiale.
- 3 **Modélisation** : dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen,
 - ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

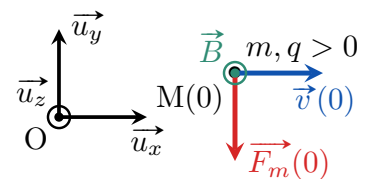


FIGURE M5.13 – Schéma

◇ Conditions initiales :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B\vec{u}_z \\ \overline{\text{OM}}(0) &= \vec{0} \\ \vec{v}(0) &= v_0\vec{u}_x\end{aligned}$$

◇ Repérage :

$$\begin{aligned}\overline{\text{OM}}(t) &= x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \\ \vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z\end{aligned}$$

4 BDF :

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}) = qB(\dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_z \\ &\Leftrightarrow \vec{F}_m = qB\dot{y}(t)\vec{u}_x - qB\dot{x}(t)\vec{u}_y\end{aligned}$$

5 PFD :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_m \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = qB\dot{y}(t) \\ m\ddot{y}(t) = -qB\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = \text{cte} = 0 \text{ ignoré} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=v_0} = \frac{qB}{m}(y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}) \\ \dot{y}(t) - \underbrace{\dot{y}(0)}_{=0} = -\frac{qB}{m}(x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 + \frac{qB}{m}(y(t)) \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m}(x(t)) \end{cases}$$

Trajectoire

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_{c,0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\dot{y}^2(t) + \dot{x}^2(t)) = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{qB}{m}x(t)\right)^2 + \left(\frac{qB}{m}y(t) + v_0\right)^2 &= v_0^2 \Leftrightarrow (x(t))^2 + \left(y(t) + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2\end{aligned}$$

Ainsi, la trajectoire est bien circulaire :

de rayon $R_c = \frac{v_0 m}{|q| B}$ de centre $C \begin{cases} (0, -R_c) & \text{si } q > 0 \\ (0, R_c) & \text{si } q < 0 \end{cases}$

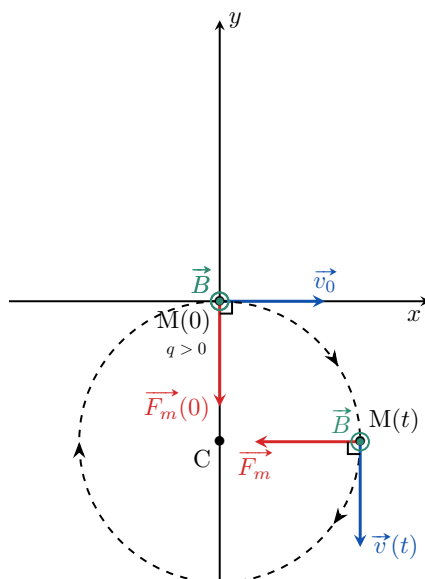


FIGURE M5.14

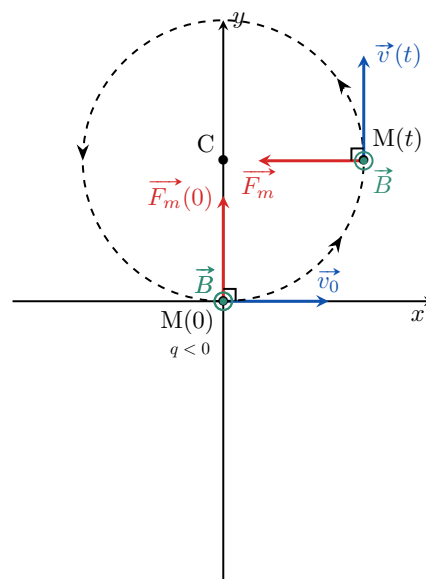


FIGURE M5.15

Équations différentielles

En repartant du PFD et en procédant par substitution,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m}\dot{y}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x(t) \\ m\ddot{y}(t) = -qB\dot{x}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y(t) - \frac{qB}{mv_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 (\pm R_c) \end{cases}$$

Ce sont des OH de pulsation propre $\omega_c = \frac{|q|B}{m} \Leftrightarrow R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$

Équations horaires

Solution générale $x(t) = x_h(t)$:

$$x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

Et avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) = A \quad \text{or} \quad x(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \Rightarrow \boxed{x(t) = R_c \sin(\omega_c t)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Solution générale $y(t) = y_h(t) + y_p$:

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \pm R_c$$

Et avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0) = A \pm R_c \quad \text{or} \quad y(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = \mp R_c \\ \dot{y}(0) = \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \\ \Rightarrow \boxed{y(t) = \pm R_c (1 - \cos(\omega_c t))} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque M5.3 : Cas général \vec{v}_0 dans \vec{B}

Soit $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{u}_x + v_{0,z}\vec{u}_z$. Les équations découplent le mouvement dans le plan xy et selon z :

- ◇ Sur z on garde une vitesse constante : $v_z(t) = v_{0,z}$;
- ◇ Pour les composantes sur x et y , on a $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = v_{0,x}^2$ et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_c}$.

Ainsi, la trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de (Oz) et d'une translation le long de cet axe : c'est un **mouvement hélicoïdal**. Une animation est disponible en ligne ².

IV/C Applications

- ◇ **Spectromètre de masse.** Un spectromètre de masse permet de **mesurer la masse d'atomes**, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

2. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Charges/general.php>

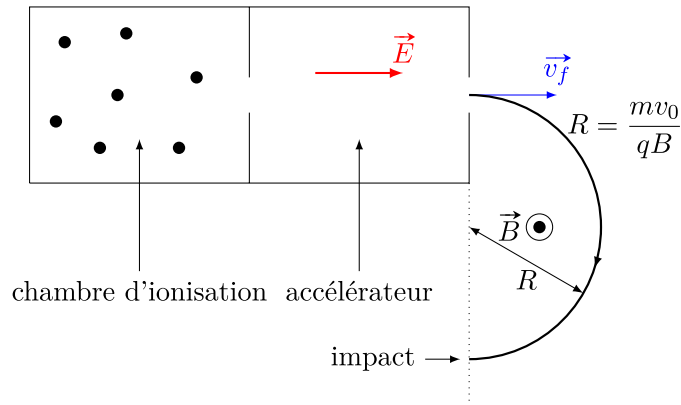


FIGURE M5.16 – Fonctionnement d'un spectromètre

- ▷ Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation ;
- ▷ Une ouverture fait sortir un flux de particules qui sont accélérées par un champ électrique, pour les amener à une vitesse $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$;
- ▷ Un champ magnétique courbe ensuite leur trajectoire, avec un rayon

$$R_c = \frac{mv_f}{qB} = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{m}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U}{q}} \sqrt{m}$$

Ainsi, la donnée de la distance d'impact permet de retrouver la masse des particules !

◇ **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

- ▷ La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les cylindres ;
- ▷ Elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone entre-deux ;
- ▷ Avec un courant alternatif bien réglé, la tension accélère de nouveau la particule ;
- ▷ Le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de $|qU|$. La vitesse croît donc comme la racine carrée du nombre de passages dans l'espace entre les cylindres.

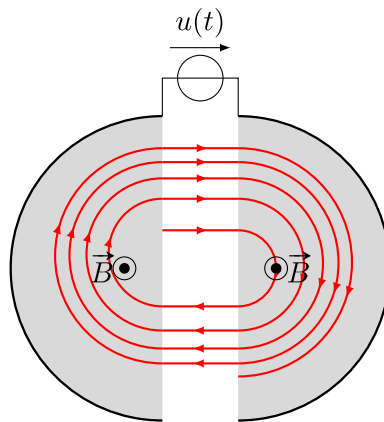


FIGURE M5.17 – Fonctionnement d'un cyclotron

Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. Voir l'animation en ligne³.

3. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.php

- ◇ **L'effet HALL.** On considère un fil parcouru par une intensité i vers la droite. Les électrons se déplacent en sens inverse, soit $\vec{v} = -v\vec{u}_x$. Si un champ magnétique est imposé selon \vec{u}_z , ils sont déviés selon $-\vec{u}_y$ ($q < 0$), et s'accumulent sur une paroi du fil. Un déséquilibre de charge s'installe, créant alors un champ appelé champ de HALL.

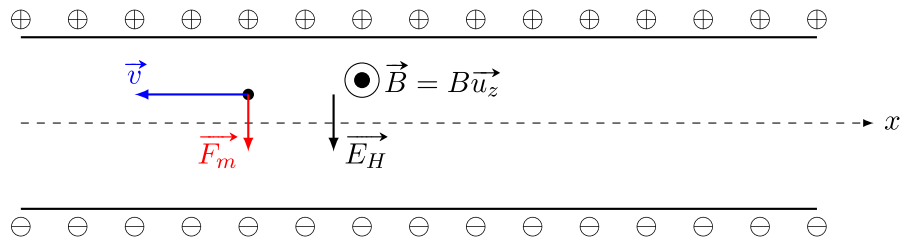


FIGURE M5.18 – Effet HALL dans un fil

En régime permanent, la force résultant de ce champ de HALL compense la force magnétique :

$$-e\vec{E}_H - evB\vec{u}_y = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{E}_H = -vB\vec{u}_z$$

On mesure la tension entre la partie supérieure du conducteur et sa partie inférieure :

$$U = V(D) - V(0) = vBd$$

Ainsi, la mesure de U permet la mesure du champ B ! C'est le principe des teslamètres à effet HALL.