Devoir maison 3 – À rendre le 24 février 2025 – Facultatif

Pendule asymétrique

I Pendule asymétrique

Un objet P_1 de masse m est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R (cf schéma ci-contre) peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal. La distance de cet axe au mobile est notée ℓ (cf schéma).

Un fil sans masse et inextensible est entouré autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas. On fixe à l'extrémité du fil un objet P_2 de masse M. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, P_2 se déplace verticalement de z. Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la figure ci-contre. Le sens positif de rotation sera pris dans le sens horaire, tel qu'indiqué sur le schéma.

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses.

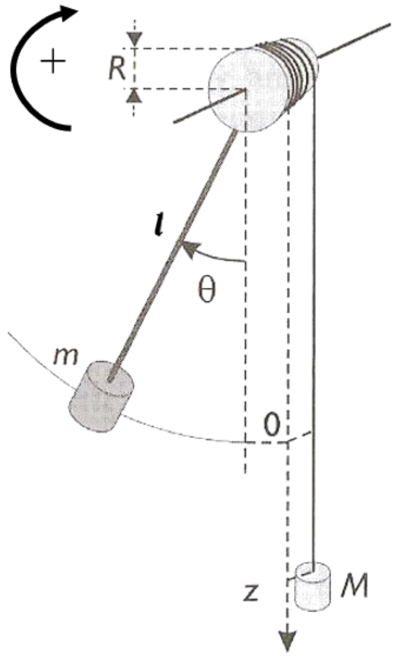


Figure DM3.1 – Schéma

1) Le fil étant inextensible et les deux masses à la même altitude $z = 0$ lorsque $\theta = 0$, on en déduit que z est lié à θ par une relation de proportionnalité de la forme $z = k\theta$. Identifier la constante k en fonction des données de l'énoncé.

2) En déduire les expressions de chaque énergie cinétique E_{C1} pour P_1, E_{C2} pour P_2, puis l'énergie cinétique E_C du système constitué des deux masses, en fonction de m, M, R, ℓ et de $d\theta/dt = \dot{\theta}$.

3) Démontrer, en partant des relations entre force et énergie potentielle, les expressions de chaque énergie potentielle de pesanteur E_{P1} pour m, E_{P2} pour M, puis montrer que l'énergie potentielle E_P du système constitué des deux masses peut se mettre sous la forme :

$$E_P = -mg\ell\cos(\theta) - MgR\theta + cste$$

4) Etudier les positions d'équilibre éventuelles du système. Montrer que si la masse M dépasse une valeur M_0, il n'y a plus de position d'équilibre. Donner l'expression de M_0 en fonction de m, ℓ et R.

5) En déduire que si $M < M_0$, il existe deux positions d'équilibre θ_{eq1} et θ_{eq2} telle que

$$\theta_{eq2} = \pi - \theta_{eq1}$$

Préciser où sont situées ces positions d'équilibre sur un cercle trigonométrique.

6) Discuter de la stabilité des positions d'équilibre, en notant θ_{eq1} la position d'équilibre stable.

7) Au voisinage de ces positions d'équilibres, on peut approximer $E_P(\theta)$ par

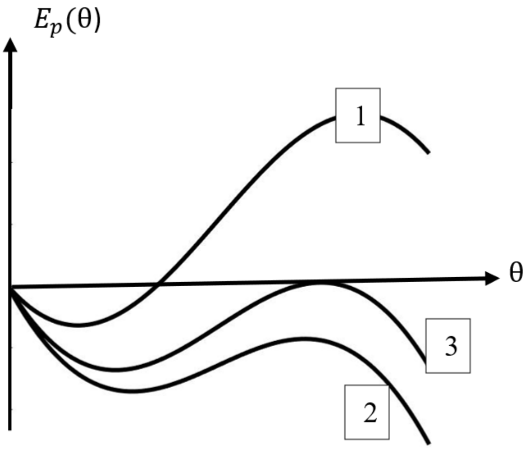
$$E_P\left(\theta\right) \sim E_0 + C\left(\theta - \theta_{eq}\right)^2$$

Justifier cette approximation et expliciter les constantes C_1 correspondant à θ_{eq1} et C_2 correspondant à θ_{eq2} en fonction de m, g, ℓ, M et M_0. Vérifier que $C_2 = -C_1$.

8) En déduire l'équation du mouvement en gardant le cas général avec C.

9) Discuter du caractère borné ou non des solutions selon que la position angulaire initiale θ_0 est voisine de θ_{eq1} : position d'équilibre stable qui correspond à $C_1 > 0$ ou de θ_{eq2} : position d'équilibre instable correspondant à $C_2 < 0$. On s'aidera de la forme des solutions de l'équation différentielle du mouvement.

Le système est placé dans la position initiale $\theta = 0$. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale. On prend $\ell = 50\,\mathrm{cm}$, $R = 5\,\mathrm{cm}$, $m = 100\,\mathrm{g}$ et trois valeurs différentes de la masse M. La figure ci-dessous représente l'énergie potentielle du système en fonction de l'angle θ pour les trois valeurs de la masse M.



10) Peut-on savoir si les valeurs de M sont inférieures, supérieures ou égales à M_0 ?

11) Que vaut l'énergie mécanique du système ? La tracer sur le graphe de $E_P\left(\theta\right)$, que vous reproduirez sommairement.

12) En fonction des valeurs de M (correspondant respectivement à chacune des trois courbes), préciser la nature du mouvement : état lié ou de diffusion.