Mécanique – chapitre 6

Moment cinétique pour un point matériel

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
- ☐ Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.
- ☐ Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.
- ☐ Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
- ☐ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- ☐ Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- ☐ Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- ☐ Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Théorèmes

Preuves

Interprétations

Applications

Outils

Erreurs communes

I Moment d'une force

I/A Par rapport à un point

Observation M6.1 : Rotation d'une planche

Lorsqu'une masse m est placée à distance d'un point « pivot », cette masse **génère une rotation**.

- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **même masse** à la **même distance** de l'autre côté.
- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **masse plus grande** à une **distance faible plus** loin du pivot.
- ◇ Ainsi l'effet est **proportionnel à la distance au pivot**.

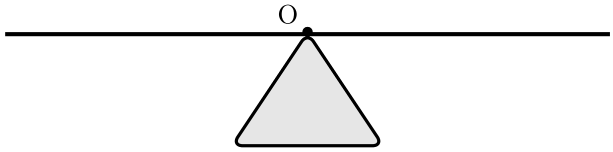


FIGURE M6.1

Définition M6.1 : Moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$

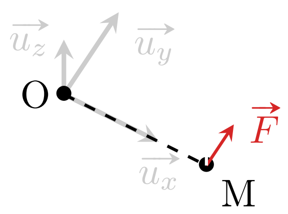
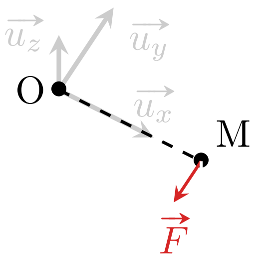
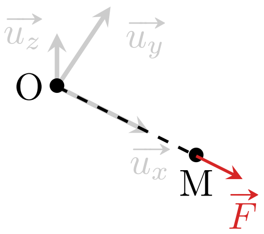
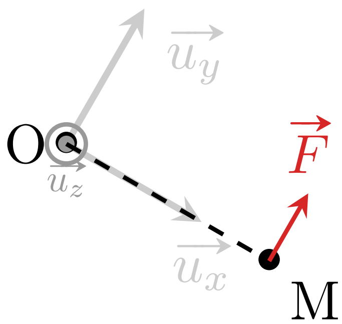
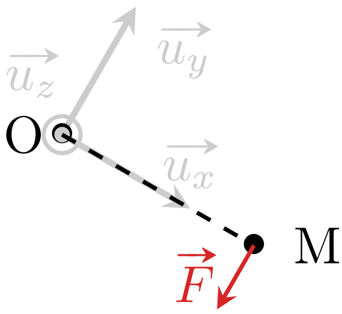
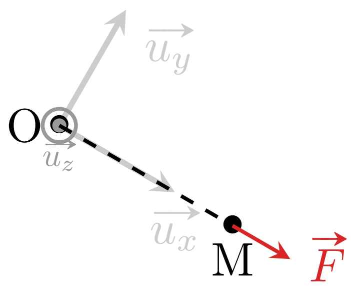
Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M par rapport à un point O est le **vecteur** :

Unité

Interprétation M6.1 : Sens d'un moment

Le **sens** de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ indique la manière dont la force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner M autour de O, et est donné par la **règle de la main droite**. Avec $\vec{u_z}$ ascendant,

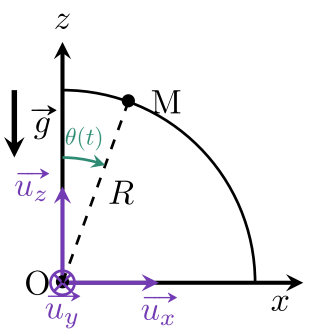
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \parallel +\vec{u_z}$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \parallel -\vec{u_z}$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0}$, $\vec{F}$

	Direct	**Horaire**	**Nul**
3D			
2D			

Application M6.1 : Moment du poids

Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ l'angle que fait OM avec la verticale.

Calculer le moment du poids par rapport à O.



Attention M6.1 : Bonne pratique

On vérifie **systématiquement** que la direction du moment calculé donne bien le sens de rotation attendu avec la règle de la main droite.

I/B Par rapport à un axe orienté

On peut directement s'intéresser à la **projection** d'un moment.

Définition M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Le moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ est le **scalaire** défini par :

avec O un point de l'axe Δ. $\mathcal{M}_\Delta$ est donc le **projeté** du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur l'axe Δ.

Attention M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

1)

2)

Interprétation M6.2 : Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Cette fois-ci c'est le **signe** de $\mathcal{M}_\Delta$ qui indique le **sens de rotation** par rapport à l'axe orienté :

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) > 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le par rapport à l'orientation de Δ

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) < 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le   par rapport à l'orientation de Δ

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) = 0$, $\vec{F}$

I/C Bras de levier d'une force

Définition M6.3 : Droite d'action et bras de levier

Pour calculer le moment d'une force $\vec{F}$ exercée en un point M par rapport à un axe orienté Δ (souvent $(\mathrm{O},\vec{u_z})$), on décompose $\vec{F}$ en deux composantes :

◇ L'une parallèle à l'axe Δ, notée

◇ L'une dans le plan perpendiculaire à l'axe Δ, notée

◇ On a ainsi   .

Droite d'action

Bras de levier

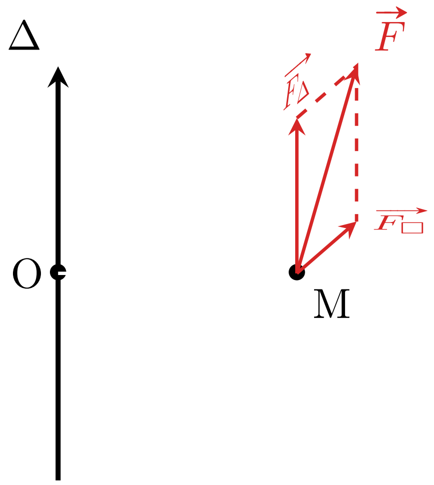


Figure M6.2 – Vue 3D

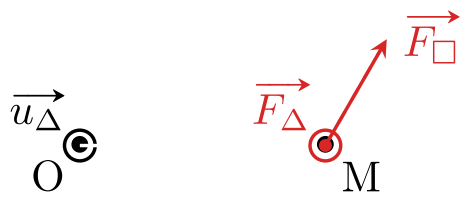


Figure M6.3 – Vue 2D

Propriété M6.1 : Moment et bras de levier

Soit M un point matériel, Δ un axe orienté et $\vec{F}$ quelconque, telle que $\vec{F} = \vec{F_\Delta} + \vec{F_\square}$.

1) La force $\vec{F_\Delta}$ ne fait pas tourner M autour de Δ :

2) La force $\vec{F_\square}$ fait tourner M selon son bras de levier :

On détermine le signe en regardant **schématiquement** dans quel sens $\vec{F_\square}$ fait tourner M.

Démonstration M6.1 : Moment et bras de levier

On commence par déterminer le moment de la force par rapport au point O de l'axe, puis on projettera par produit scalaire avec $\overrightarrow{u_\Delta}$. On a donc :

■

Exemple M6.1 : Cas de nullité

◇

◇

◇

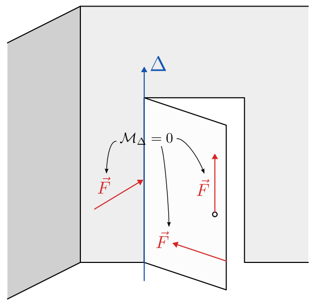


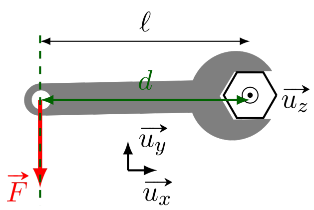
Figure M6.4 – Moments nuls

Outils M6.1 : Méthode du bras de levier

1) **Identifier** l'axe de rotation Δ et le point O dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\Delta}$ passant par M ;
2) (Optionnel) **Projeter** $\vec{F}$ dans ce plan perpendiculaire pour avoir $\vec{F}_\square$ si nécessaire ;
3) **Tracer** la droite d'action, passant par M et dirigée par $\vec{F}_\square$;
4) **Placer** le point H et calculer géométriquement d ;
5) **Identifier** le sens de rotation avec la règle de la main droite.

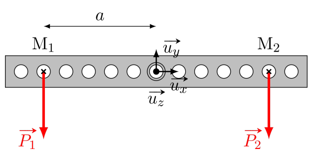
Application M6.2 : Moments par 2 méthodes

Déterminer le moment des forces sur les systèmes suivants par les deux méthodes présentées : calcul direct et bras de levier.



Calcul direct

Bras de levier



Calcul direct

Bras de levier

Application M6.3 : Trois forces pour un mouvement

On considère trois forces, de normes égales à F, exercées sur une porte pour l'ouvrir. Laquelle est la plus efficace ? Justifier à l'aide du bras de levier.

1)

2)

3)

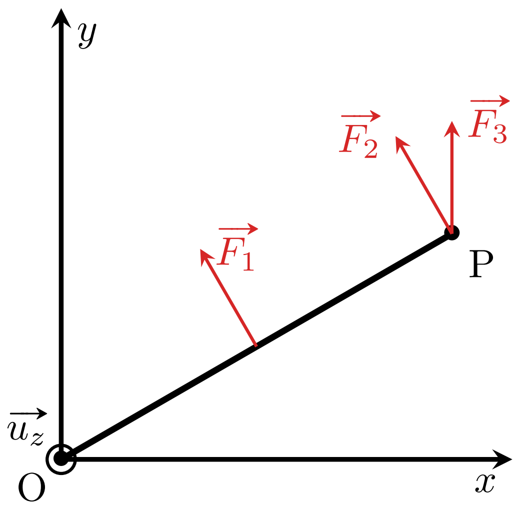


Figure M6.5 – Schéma

C'est donc $\boxed{}$ qui est la plus efficace.

II Moment cinétique

II/A Moment cinétique par rapport à un point

Définition M6.4 : Moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le **vecteur** :

Il traduit la « quantité de rotation » d'un point matériel.

Unité

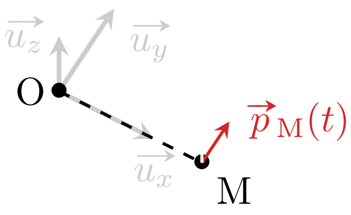
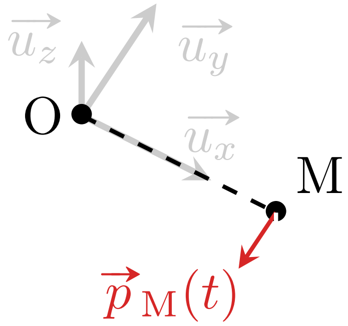
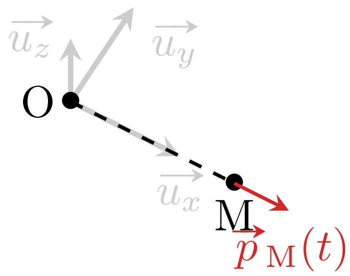
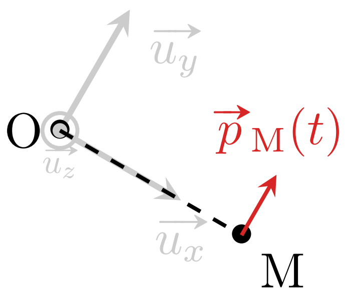
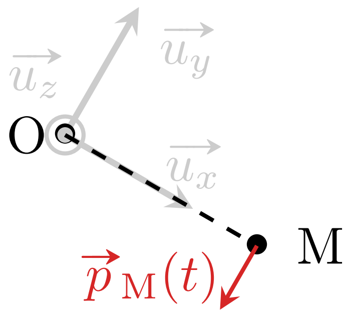
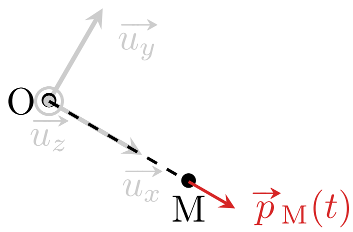
Interprétation M6.3 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$

◇ Considérons un repère polaire autour de l'axe (Oz). On a alors

Ainsi, **le moment cinétique ne conserve une information que sur la rotation du système**. Si celui-ci est nul tout le temps, soit il n'y a pas de mouvement, soit le vecteur vitesse et le vecteur position sont colinéaires et le mouvement est rectiligne.

◇ La **direction** de $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ indique la manière dont M tourne autour de O. Pour $\vec{u_z}$ ascendant,

- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t) \parallel +\vec{u_z}$, M tourne dans le
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t) \parallel -\vec{u_z}$, M tourne dans le
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0}$, M

	Direct	**Horaire**	**Nul**
3D			
2D			

II/B Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Définition M6.5 : Moment cinétique axial $\mathcal{L}_{\Delta}(\mathrm{M},t)$

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un axe orienté Δ dans $\mathcal{R}$ est le **scalaire** :

avec O un point de l'axe. $\mathcal{L}_{\Delta}$ est le projeté du moment $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}$ sur Δ.

Interprétation M6.4 : Signe de $\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)$

Cette fois-ci aussi, c'est le **signe** de $\mathcal{L}_\Delta$ qui indique le sens de rotation de M autour de l'axe.

Attention M6.3 : Moment vecteur et moment scalaire

$\mathcal{L}_\Delta$ est un scalaire, alors que $\overrightarrow{\mathcal{L}}_\mathrm{O}$ est un vecteur !

Propriété M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O

$\mathcal{L}_\Delta$ est indépendant du point O de l'axe Δ.

Démonstration M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O

III Théorème du moment cinétique

III/A Par rapport à un point *fixe*

Théorème M6.1 : du moment cinétique par rapport à un point *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et O un point **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

Preuve M6.1 : TMC vectoriel

Il suffit ici d'appliquer $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge$ ou de partir du résultat.

Ainsi,

III/B Par rapport à un axe orienté *fixe*

Théorème M6.2 : du moment cinétique par rapport à un axe orienté *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et Δ un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

Preuve M6.2 : TMC scalaire

On projette simplement le TMC version vectorielle sur $\overrightarrow{u_\Delta}$:

III/C Application du pendule simple

Application M6.4 : Pendule simple par TMC

1 **Système** : {masse M} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

2 **Schéma.**

3 **Modélisation.**

- **Repère** :
- **Repérage** :
- **Conditions initiales** :

4 **Bilan des forces.**

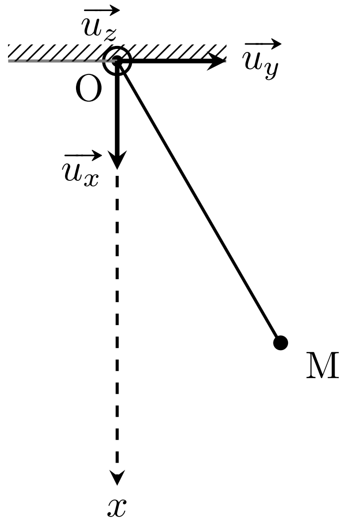


Figure M6.6 – Schéma.

5 **Calcul des moments.**

6 **TMC** :